This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

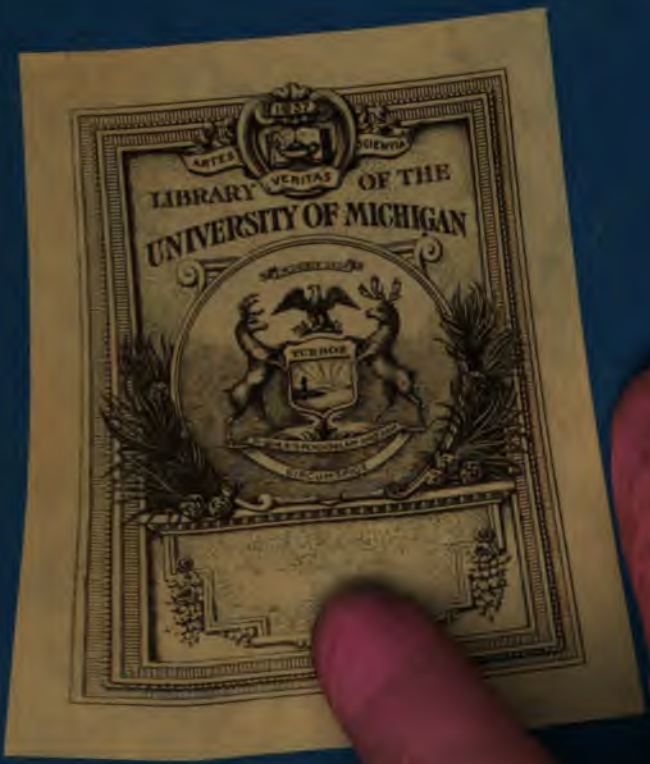
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

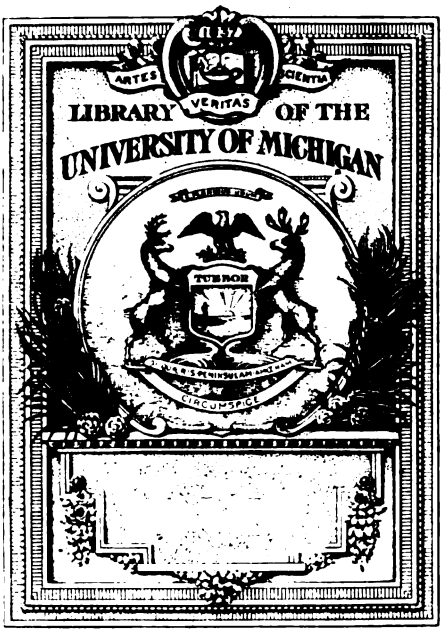
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

12ᵉ 14 pl. dont 1 hs

LEÇONS
DE
GÉOMÉTRIE,
THÉORIQUE ET PRATIQUE.

LEÇONS
DE
GÉOMÉTRIE,
THÉORIQUE ET PRATIQUE,

A l'usage de Messieurs les Eleves de l'Académie Royale d'Architecture, et de l'Ecole Royale des Ponts et Chaussées.

Par M. Jean René Mauduit, Lecteur Royal en Mathématiques, Professeur en la Chaire de Ramus, au College Royal de France, Architecte du Roi et Professeur de son Académie Royale d'Architecture, Censeur Royal et membre de plusieurs Académies.

NOUVELLE ÉDITION,

Revue, corrigée et augmentée.

A PARIS,

Chez { L'Auteur, au vieux Louvre,
Didot et Bleuet, Libraires, rue dauphine,
Barrois et Musier, Libraires, quai des Augustins,
Grégoire, Libraire, rue du Coq, près le vieux Louvre.

M. DCC. XC.

Hist. of Sci
Lafitte

2-10-28
16267

PREFACE.

L'OUVRAGE dont je donne aujourd'hui une nouvelle édition, étoit particulièrement destiné à ceux qui me font l'honneur de suivre mes leçons à l'académie royale d'architecture. Peu de temps après sa publication, messieurs les ingénieurs-éleves du corps royal des ponts et chaussées crurent devoir l'adopter; pour servir de base a leur instruction, dans la partie élémentaire. Je saisis avec plaisir cette occasion de leur en marquer ici ma plus juste reconnoissance. Ce choix, en effet, étoit d'autant plus flatteur pour moi, que je m'en serois cru indigne si je l'avois sollicité; et que d'ailleurs, il me donnoit lieu de croire que j'avois fort approché du but que je m'étois proposé en composant cet ouvrage. Après avoir enseigné les différentes parties des mathématiques pendant plusieurs années dans cette école, justement célebre; j'avois reconnu que tous nos livres élémentaires n'étoient pas suffisamment dirigés vers la pratique, quoique la plupart méritassent à tous égards l'estime dont ils jouissoient. Quelques auteurs, en voulant ôter à la géométrie une rigueur et une sécheresse prétendues, l'avoient en effet dépouil-

lée de cette précision qui en fait tout le prix ; et qui la distingue de toutes les autres connoissances qui n'ont pas, comme elle, l'évidence pour base, et dont les résultats sont presque toujours incertains. D'autres, croyant affecter une marche analytique, se sont hâtés d'appliquer l'algebre aux premiers éléments de cette science, avant d'en avoir posé les fondements, et développé les principes. En un mot, il sembloit qu'on eût formé le dessein de proscrire la marche adoptée depuis Euclide jusques à nous, et de bannir des éléments cette géométrie ancienne, si belle par sa simplicité, si féconde dans ses conséquences, et si précieuse par l'élégance de ses constructions, toujours déduites des considérations les plus directes et les plus liées à l'état de la question.

Toutes ces raisons me déterminerent à essayer de composer un ouvrage plus spécialement consacré à tous ceux qui se destinent au génie militaire ou civil, et à l'architecture, qui embrasse tous les arts qu'elle dirige et qu'elle anime. Sans cesse, occupés de plans de coupes et d'élévations géométrales ou perspectives, de développements, de projections et de pénétrations de solides de toute espece dans la charpente et dans la coupe des pierres ; le compas doit être, pour tous ceux

qui se livrent à ces professions utiles, un instrument universel; sauf à appliquer par la suite à ses opérations les autres instruments de nos connoissances, afin de les réduire en pratique.

C'est d'après ces vues que j'ai composé ces leçons élémentaires, dans lesquelles j'ai tâché continuellement de faire marcher d'un pas égal la théorie et la pratique, en me rapprochant le plus qu'il étoit possible du taux actuel de nos connoissances. Le grand nombre de théorêmes répandus dans cet ouvrage, annonce que j'y ai suivi la méthode synthétique des anciens, qu'ils ont nommée *méthode de doctrine*: il est cependant entierement analytique à l'égard de tous les problêmes qui y sont proposés. Jamais on ne trouvera de solution qui n'ait été amenée et préparée par une discussion raisonnée de l'état de la question, et de tous les rapports qu'elle peut avoir avec ce qui précede. C'est toujours en supposant le problême résolu, que j'arrive en effet à sa solution; et c'est là ce qui constitue essentiellement l'*analyse*, dont la marche est à-peu-près la même dans toutes les connoissances humaines. En suivant cette méthode, on exerce réellement les forces de son esprit; on ne doit qu'à soi-même les vérités nombreuses que l'on découvre; on étend la

sphere du jugement, et l'on se prépare des jouissances inconnues à tous ceux qui n'ont jamais médité et réfléchi.

Je n'ai point fait usage de l'algebre dans la solution des différents problêmes que je propose ; parcequ'en suivant, comme je le fais, l'analyse géométrique des anciens, on y arrive toujours par la voie la plus courte et la plus simple. Outre les constructions graphiques par la regle et le compas, j'ai toujours eu l'attention d'y joindre celles qui tiennent au calcul numérique, comme plus exactes dans la pratique, quoique moins rigoureuses aux yeux du géometre qui veut s'en tenir uniquement à la théorie. Cette réunion continuelle de deux moyens applicables à la solution des problêmes, est peut-être ce qui établit une différence réelle et remarquable entre ces éléments et tous ceux qui les ont précédés. J'ai tâché sur-tout de multiplier les regles générales pour les figures irrégulieres, planes ou solides, que l'on rencontre à chaque instant dans la pratique ; et sur lesquelles les auteurs élémentaires ont gardé le plus profond silence.

On sera sans doute étonné de ne point trouver dans ce traité une théorie particuliere des proportions et progressions, suivant la méthode d'Euclide adoptée avec raison par les meilleurs

auteurs élémentaires. Pour répondre à cette objection, qui doit paroître fondée à tous égards, je crois devoir observer que le parti que j'ai adopté tient à la marche que je suis dans l'enseignement des éléments. Comme il seroit absurde de vouloir étudier aucuns traités de géométrie, sans connoître suffisamment les regles de l'arithmétique; c'est dans cette science qu'il faut puiser tout ce qui a rapport à la théorie des proportions. Quoique bien des personnes se soient persuadées qu'il est impossible de démontrer leurs propriétés fondamentales d'une maniere générale par les nombres et sans le secours de l'algebre; on peut aisément se convaincre du contraire, si l'on fait attention que toutes ces propriétés sont des conséquences nécessaires de l'égalité des rapports qui constituent les proportions et progressions géométriques; quelles que soient les quantités entre lesquelles ces rapports égaux se trouvent avoir lieu. Or c'est ce que je crois avoir fait dans l'ouvrage qui a pour titre, *Eléments d'analyse numérique,* dont je publierai incessamment une nouvelle édition. Cette considération, sans nuire à la clarté de ces éléments, a contribué singulièrement à les abréger d'une part, et à les étendre de l'autre. Je n'ai eu autre chose à faire, qu'à montrer com-

ment on établit les proportions géométriques sur les lignes; quelles sont les figures qui servent à construire les lignes proportionnelles; et comment il faut en faire usage, soit pour les lignes, soit pour les surfaces ou pour les solides.

Cette nouvelle édition differe de la premiere, non seulement par des additions et des corrections nombreuses répandues dans le corps de l'ouvrage, mais encore par l'addition de deux chapitres qui m'ont paru nécessaires pour donner à ces leçons tout le degré d'utilité dont elles peuvent être susceptibles.

Le premier est un traité des figures *isopérimetres*; c'est-à-dire de celles qui, dans certaines conditions données, réunissent d'autres conditions à un plus haut ou à un plus petit degré possible. Ce morceau est une traduction libre de ce que M. *Thomas Simpson* nous a donné dans ses Eléments de géométrie, vrai chef-d'œuvre de concision, et digne à tous égards de l'approbation de tous ceux qui connoissent le prix d'une géométrie exacte et rigoureuse. J'ai cru qu'il serviroit à faire connoître plus particulièrement l'analyse géométrique des anciens, presque entièrement inconnue parmi nous; tandis que les Anglois la regardent, avec raison, comme la seule base solide des connois-

tances qu'on peut acquérir dans les différentes parties des mathématiques.

Le second chapitre est un traité de trigonométrie sphérique, que j'ai cru nécessaire pour completter tout ce qui a rapport à la levée des plans et des cartes géographiques, par des opérations en grand sur le terrain. Je me suis appliqué à lui donner le plus d'étendue possible, sous le plus petit volume.

Je crois avoir obtenu cet avantage par la généralité et la simplicité de mes démonstrations, et sur-tout par l'exposition des fameuses analogies de *Neper*. Avec leur secours, les deux trigonométries n'en font plus qu'une seule; tant les solutions des différents cas, sur-tout pour les triangles obliquangles, ont de rapport les unes avec les autres. C'étoit d'ailleurs le seul moyen de donner à la trigonométrie rectiligne toute l'étendue dont elle est susceptible; en déduisant les formules qui lui conviennent de celles des triangles sphériques dans les mêmes conditions : ce qui n'est pas réciproque de la trigonométrie sphérique pour la trigonométrie rectiligne.

Ceux qui voudroient joindre à la connoissance de ces solutions celles qui dépendent des opérations graphiques et du calcul algébrique; pour-

ront avoir recours à l'ouvrage que j'ai donné sous le titre de *Principes d'astronomie sphérique*, ou à celui qui a été publié depuis peu par M. *Cagnoli* sur le même objet. Je n'aurois pu entrer dans un plus grand détail, sans sortir beaucoup au-delà des bornes qui conviennent à cet ouvrage; et d'ailleurs, il faudroit supposer à ceux auxquels il est destiné, des connoissances de calcul algébrique que je n'ai point voulu exiger.

J'ai terminé ce traité par une théorie des courbes, connues des praticiens sous le nom *d'Anses de panier*. Elles sont d'un usage continuel dans la construction des ponts; sur-tout lorsque les arches sont d'un grand diamètre et très-surbaissées. Je reconnois avec plaisir que l'on trouvera cette théorie presque toute entiere à la fin des Eléments de géométrie de M. *Camus;* mais je me flatte aussi que l'on me saura quelque gré de l'avoir présentée d'une maniere plus naturelle. L'analyse géométrique, que j'ai suivie ici comme ailleurs, m'a non-seulement conduit aux mêmes solutions par la voie la plus courte, mais a fait connoître la loi générale du tracé de ces sortes de courbes, pour tant de centres que l'on voudra; ainsi que la maniere de déterminer les rapports de leurs différents rayons,

soit par la géométrie des lignes, soit par un calcul direct, ou enfin par les tables des sinus; d'où l'on peut aisément déduire la grandeur de leurs arcs et l'étendue de leurs surfaces. Je crois cependant que si nos constructeurs y faisoient bien attention, ils préféreroient à ces courbes, la véritable ellipse, comme plus agréable à l'œil et plus solide, ainsi que je pourrois le démontrer, si j'étois à même de donner une nouvelle édition de mes Sections coniques, telle que je l'ai préparée, mais que les circonstances ne me permettent pas de publier dans le moment présent.

Explication des signes, dont on fait usage dans les éléments.

Le signe = marque l'égalité entre la quantité qui le précede et celle qui le suit.

$+$ et $-$ sont les signes d'addition et de soustraction. Les mêmes signes $\pm$ placés l'un au-dessus de l'autre, indiquent que la quantité qui les suit est ajoutée à celle qui précede ou soustraite de la même quantité.

$A > B$, signifie que A est plus grand que B.

$A < B$, signifie que A est plus petit que B.

Le signe $\surd$ qu'on nomme radical, indique la racine quarrée de tout ce qui suit ce même signe. S'il est question d'une racine cubique, on se sert du même signe avec un 3 au-dessus.

ERRATA.

Pages 39,	*lignes* 19,	AGF,	*lisez* ACF.
79,	14,	inégaux,	*lisez* égaux.
88,	5,	AFD,	*lisez* AFB.
90,	20,	ALK,	*lisez* HLK.
101,	9,	ou,	*lisez* en.
ibid.	13,	AD,	*lisez* BD.
104,	9,	150,	*lisez* 115.
113,	8,	ont,	*lisez* sont.
133,	13,	de AC *a* AG,	*lisez* de AG à AC.
135,	24 *et* 25,	Ad; Bd,	*lisez* Bd; Cd.
145,	18,	A*f*,	*lisez a f.*
166, *dern. l.*		OB,	*lisez* AB.
171,	18,	$a^2 - b^2$,	*lisez* $a^2 + b^2$.
240,	25,	C*b*,	*lisez* C*l*.
263, *artic.*	359,	par un plan,	*lisez* par un point.
399,	*sin.*	$3A = s - 4s^3$,	*lisez* $= 3s - 4s^3$.
473, *prem. l.*,		*tang.* $(\frac{1}{2}BD \pm \frac{1}{2}CD)$,	*lisez* *tang.* $(\frac{1}{2}BD \mp \frac{1}{2}CD)$, et de suite le signe — a lieu quand etc.; et le signe + a lieu quand etc.

LEÇONS
DE GÉOMÉTRIE
THÉORIQUE ET PRATIQUE.

LIVRE PREMIER.

CHAPITRE PREMIER.

1. L'ORIGINE de la géométrie remonte à l'époque où les premiers cultivateurs songerent à fixer d'une maniere précise les limites des champs qu'ils avoient fertilisés par leurs travaux.

La mesure et le partage des terres furent les premiers objets auxquels elle fut particulièrement consacrée, comme son nom nous le fait assez connoître. Mais elle ne fut pas long-temps bornée à des spéculations de cette nature; elle s'est élevée rapidement au degré de perfection où nous la voyons aujourd'hui, en sorte qu'on peut la considérer comme *la science des grandeurs continues*, c'est-à-dire *de toutes celles entre les parties desquelles l'esprit ne conçoit aucune séparation.* On en distingue de deux especes: les unes, dont toutes les parties existent en même temps, que l'on nomme *permanentes;* les autres, dont les parties ne peuvent exister que l'une après l'autre, on les nomme *successives.* Les premieres

se trouvent dans l'étendue matérielle ou dans l'espace ; les autres ont rapport aux idées du mouvement, du son et de la durée. C'est uniquement des premieres qu'il est question en géométrie ; et c'est encore par ces mêmes grandeurs que l'on exprime les autres dans la méchanique et dans les sciences physico-mathématiques.

2. On a de tout temps reconnu trois especes de grandeurs continues ; les *lignes*, les *surfaces* et les *solides*. La ligne est une étendue en longueur seulement, et n'a aucune largeur. La surface est une étendue en longueur et en largeur. Le *corps* ou *solide* est une étendue qui a les trois dimensions, *longueur*, *largeur* et *épaisseur*. Le solide ou corps est la seule espece de grandeur continue qui existe indépendamment de nos idées ; encore la géométrie n'a-t-elle égard qu'à la place qu'il occupe dans l'espace, et qu'on appelle son *volume*. Nous ne connoissons les lignes et les surfaces que par des abstractions ; ce qui sera facile à concevoir lorsque nous aurons expliqué ce que l'on doit entendre par *dimensions* du corps ou solide.

Pour peu que l'on y fasse attention, on reconnoîtra aisément qu'il n'y a rien d'absolu, et que, dans la science des grandeurs, tout se réduit à des rapports. D'après cela, il est aisé de concevoir que les dimensions d'un corps ou solide sont des grandeurs au moyen desquelles on peut juger de l'espace qu'il occupe, ou connoître le rapport de son volume avec un autre volume pris pour mesure, et qui est censé connu. On

ne peut concevoir aucun corps, aucun espace, ni même aucune partie de l'espace, qui ne soient terminés de toutes parts; en sorte qu'on y distingue toujours trois dimensions, *longueur, largeur* et *épaisseur.*

3. Ces trois dimensions sont essentiellement de même nature, puisqu'elles ne sont chacune que des étendues linéaires; mais on leur a donné différents noms, relativement à la maniere dont on les conçoit placées dans le corps. La *longueur* d'un solide ou du volume qui en fixe l'étendue est celle de ses dimensions qui est dans la direction d'un rayon visuel; la *largeur,* celle qui se présente de face; enfin, son *épaisseur* est une ligne perpendiculaire à l'horizon. Comme cependant les dimensions d'un solide pourroient n'avoir aucune de ces positions à l'égard du spectateur, on nomme longueur celle de ses trois dimensions qui a le plus d'étendue, épaisseur celle qui en a le moins, et enfin largeur celle qui est moyenne entre les deux; sauf à les prendre l'une par l'autre si elles deviennent égales. Si le corps est d'une forme extrêmement irréguliere, il faut regarder, comme ses dimensions, les lignes connues ou à connoître, au moyen desquelles on viendroit à bout de fixer le volume qu'il occupe dans l'espace, de quelque maniere qu'on puisse les déterminer.

4. Si l'on fait abstraction de l'une des dimensions d'un solide pour n'en considérer que deux, ou si l'on ne considere que l'enveloppe d'un corps, on a l'idée d'une surface, ou d'une étendue qui n'a que deux dimensions, longueur et

largeur; d'où il suit qu'aucune surface ne peut exister seule, et indépendamment des corps.

5. Pareillement si l'on considère la borne ou la limite d'une surface, on a l'idée d'une ligne ou d'une étendue en longueur seulement. Ainsi la ligne est la borne d'une surface, et ne peut avoir aucune largeur : néanmoins, pour représenter aux yeux et à l'esprit celles que nous tracerons, nous leur donnerons une largeur qui les rende sensibles, mais dont la raison les dépouille au même instant qu'elle s'en forme l'idée.

6. Le point n'est que la borne d'une ligne; il ne peut donc avoir aucune espece d'étendue appréciable ou sensible. C'est le dernier degré d'abstraction; d'où il suit qu'on ne peut le considérer seul, puisqu'il n'a aucune des especes d'étendue que la géométrie considere. Quelques géometres l'ont cependant regardé comme le principe générateur de toute espece d'étendue. Quoique ces idées soient vraies dans le fond, néanmoins de prétendus métaphysiciens en ont tiré de fausses conséquences sur la nature des éléments de chaque espece de grandeur continue. Nous sommes forcés de relever ces erreurs avant d'aller plus loin.

7. On a donc dit avec raison que l'idée d'un point qui se meut vers un autre suivant une loi quelconque, nous donne l'idée d'une ligne ou d'une étendue sans largeur; ce qui est en effet, puisque ces deux idées sont identiques. Mais c'est à tort que l'on a conclu que la ligne étoit composée de points mathématiques, tels que nous les avons définis.

Pareillement l'idée d'une ligne en mouvement est la même que l'idée d'une étendue qui a deux dimensions, pourvu que son mouvement se fasse de maniere que toutes ses parties aillent de front, ou tournent autour de quelque axe donné de position, puisque l'idée d'un pareil mouvement est identique avec celle d'une étendue qui a deux dimensions : mais il ne s'ensuit nullement, comme on l'a prétendu, que les surfaces soient composées de lignes sans largeur ; ou si vous leur en donnez une, si petite qu'elle soit, ce ne seront plus des lignes mathématiques ; et vous donnerez le même nom à des étendues très différentes.

Enfin on reconnoît aisément que le mouvement d'une surface qui se meut vers une autre surface, ou autour d'un axe, détermine dans l'espace une étendue qui a les trois dimensions : mais il ne s'ensuit nullement que les solides soient composés de surfaces absolues sans épaisseur ; et si vous leur en donnez une quelconque, ce ne seront plus des surfaces, telles que nous les avons définies, mais de vrais solides.

Corollaire I.

8. Il suit de ce qui précede, et de ce que les éléments d'une quantité doivent être de même nature que cette quantité, que *les éléments des lignes sont des lignes, dont le point est la limite ;* que *les éléments des surfaces sont des surfaces dont la ligne est la derniere limite ;* et qu'enfin *les éléments des solides sont des solides, infiniment petits si l'on veut ;* mais qui ont toujours trois dimensions, comme le solide auquel ils ap-

partiennent, et dont la surface est la limite qu'ils n'atteindront jamais.

COROLLAIRE II.

9. Il suit encore de tout ce qui précede que la géométrie élémentaire doit naturellement renfermer trois parties : la premiere traitera des lignes, la seconde des surfaces, et la troisieme des solides. Mais, outre ces trois parties, nous y joindrons quelques traités particuliers pour montrer l'application des vérités élémentaires à la pratique.

OBSERVATION.

10. En exposant chacune de ces trois parties séparément, nous les considérerons d'abord dans un très grand degré d'abstraction et de généralité, sans nous assujettir, dans la détermination de leurs rapports, à aucune unité fixe et déterminée ; c'est ce qui constitue la géométrie proprement dite, dont les principes invariables doivent être les mêmes dans tous les temps et dans tous les lieux. Ensuite nous ferons l'application des regles générales que nous aurons établies aux toisés les plus en usage, particulièrement pour les surfaces et pour les solides ; et cette partie de la géométrie devient une science composée de la premiere et de l'arithmétique, sans laquelle il seroit absurde de vouloir s'y appliquer.

Quoique la méthode d'enseigner par théorêmes tienne à la méthode synthétique, il n'en est pas moins vrai que ce traité élémentaire est en même temps analytique, puisque l'on n'y trouvera jamais la solution d'aucun problême

qu'elle n'ait été amenée par les considérations des vérités qui y ont un rapport plus immédiat, et par une analyse absolument géométrique ; en sorte que l'on puisse apprendre en même temps et les vérités élémentaires les plus importantes, et la manière de les découvrir par la liaison intime qu'elles ont entre elles.

Explication des signes dont on fera usage dans ce traité.

Le signe = signifie l'égalité entre les grandeurs qui le précedent et qui le suivent,

Les signes $<$ et $>$ signifient *plus grand* et *plus petit,* la quantité la plus grande étant du côté de l'ouverture, et la plus petite vers la pointe; $A < B$ signifie que A est plus petit que B, et $A > B$ signifie le contraire.

Nous nous servirons des signes + et —, qu'on prononce *plus* et *moins,* pour marquer l'addition ou la soustraction de plusieurs quantités : de même lorsqu'il s'agira d'indiquer la racine quarrée d'une quantité, nous emploierons le signe $\surd$ qu'on nomme signe radical; en mettant un 3 au-dessus du signe, lorsqu'il s'agira d'une racine cubique. Nous indiquerons pareillement la multiplication de deux quantités par le signe × qu'on prononce *multiplié par*, et la division par une barre horizontale mise entre le dividende et le diviseur. Enfin toute proportion géométrique sera exprimée par deux points entre les termes des rapports égaux, et quatre entre le premier et le second rapport. Ainsi, pour marquer que les

lignes AB, BC, CD, DE, sont en proportion, on mettra AB : BC :: CD : DE. La progression ou proportion continue s'exprimera par ce signe ∺ précédant tous les termes, et par deux points entre les autres. Ainsi, si les lignes désignées ci-dessus sont en progression continue, on écriroit comme il suit ∺ AB : BC : CD : DE, etc.

CHAPITRE II.

Des lignes droites et de leurs principales propriétés.

§. PREMIER.

11. Nous supposerons toutes les figures que nous aurons à décrire, tracées sur un plan, c'est-à-dire sur une surface à laquelle on peut appliquer une regle bien dressée dans toutes sortes de directions. Telle est sensiblement la surface d'une glace bien polie.

12. *Définition.* Une ligne droite AB (*fig.* 1, *planche* I) est celle dont toutes les parties sont dans une seule et même direction; ou ce qui revient au même, c'est une étendue en longueur seulement, et que l'on conçoit formée par le mouvement d'un point A vers un autre point B, sans aucun détour; d'où il suit que la ligne droite est le chemin le plus court entre ces deux extrémités.

Observation. Un auteur célebre a reproché à M. d'A-

lembert de ne pas savoir ce que c'est qu'une ligne droite, parceque le géometre avoit attaqué la définition de la ligne droite. Je pourrois mériter le même reproche, et je conviens que cette définition n'est qu'un cercle vicieux, et que, bien analysée, elle se réduit à dire que la ligne droite est la ligne droite. Je crois néanmoins qu'on ne peut pas espérer de meilleure définition, et que l'idée de la ligne droite étant une des idées primitives n'est pas susceptible de définition; et d'ailleurs il n'en résultera aucune erreur dans la géométrie.

M. l'abbé *Venini*, géometre distingué, et auteur d'un excellent ouvrage, qui a pour titre *Elementi di mathematica*, imprimé à Parme 1770, définit la ligne droite par une propriété qui n'appartient qu'à elle seule, c'est de ne pouvoir renfermer aucun espace en tournant sur deux quelconques de ses points. Mais cette vérité est plutôt une suite nécessaire de la nature et de l'essence d'une ligne droite qu'une définition de cette ligne; en sorte qu'il me paroît toujours constant que toutes les définitions de la ligne droite se réduiront à dire que la ligne droite est la ligne droite.

COROLLAIRE I.

13. Par un point A donné sur un plan, on peut faire passer une infinité de lignes droites AB, AC, AD, parceque le même point peut être une extrémité commune à plusieurs lignes: donc un point ne suffit pas pour déterminer la position d'une ligne droite. On voit au contraire que par deux points A et B on ne peut faire passer que la seule ligne droite AB; d'où nous conclurons que deux points suffisent pour déterminer la position d'une ligne droite.

COROLLAIRE II.

14. Donc une ligne droite ne peut pas en couper une autre dans deux points. Car, supposant pour un instant que cela fût possible, ces deux points étant communs à chaque ligne et pouvant servir à déterminer chacune d'elles, il ne seroit plus vrai de dire, comme on vient de le démontrer tout à l'heure, que deux points ne déterminent qu'une seule et même ligne droite.

SCHOLIE.

15. Tout le monde connoît la maniere de tracer une ligne droite avec la regle sur le papier. S'il s'agit de lignes qui doivent avoir une certaine étendue, et qu'on n'ait point de regle assez grande, on se sert de ficelles bien tendues et frottées sur de la craie pour les tracer; en les pinçant par le milieu, et les élevant au-dessus du plan pour les lâcher ensuite, la ligne droite se trouve tracée, même sur des surfaces irrégulieres. C'est ainsi que les charpentiers décrivent des lignes sur de longues pieces de bois, sur-tout lorsqu'elles doivent être sciées de même épaisseur dans toute leur longueur.

Dans la levée des plans, les alignements se tracent avec des jalons refendus à leurs extrémités supérieures pour y insérer une carte blanche qui sert à les rendre plus visibles. On les fiche en terre, et on les dispose de maniere que tous se trouvent dans la direction d'un seul et même rayon visuel.

COROLLAIRE III.

16. Puisque la ligne droite est le chemin le plus court de l'une à l'autre de ses extrémités, il s'ensuit que tout chemin brisé, tel que ACB (*fig.* 3), est plus long que la ligne droite AB; et que de deux chemins brisés ACB, ADB, terminés aux mêmes extrémités, et formés chacun de deux lignes droites, celui qui s'éloigne le plus de la ligne droite AB est le plus long, et réciproquement.

Pour le démontrer, soit prolongée la ligne AD jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite CB à E, on aura AC + CE > AE; ajoutant EB, on aura AC + CE + EB, ou AC + CB > AE + EB: mais AE + EB est aussi plus grand que AD + DB; car DE + EB > DB, et ajoutant AD, on aura AD + DE + EB, ou AE + EB > AD + DB; donc, à plus forte raison, AC + CB est plus grand que AD + DB.

N. B. Les géometres, dans les premiers éléments de cette science, démontrent souvent des vérités qu'on pourroit mettre au rang des axiomes, comme celle du dernier corollaire. Nous ne croyons pas devoir abandonner cette méthode, soit pour conserver à la géométrie cette précision qui en fait le caractere et la beauté, soit pour mieux accoutumer les commençants à la maniere de bien démontrer, en les exerçant d'abord sur des propositions évidentes où ils n'ont d'autre étude que celle de saisir la marche des raisonnements, qui est presque par-tout la même.

§. II.

Des différentes positions des lignes droites les unes à l'égard des autres; des angles qui en résultent lorsqu'elles se rencontrent.

17. Deux lignes droites tracées sur un plan ne peuvent avoir que deux positions l'une à l'égard de l'autre : ou bien elles sont disposées de maniere qu'elles se coupent ou peuvent se rencontrer en les prolongeant, et alors on les nomme *lignes concourantes;* ou bien elles sont disposées de maniere qu'elles ne peuvent jamais se rencontrer, si loin qu'on les prolonge, et dans ce cas on les nomme *paralleles.*

18. Deux lignes droites, tracées sur un plan, se coupent dans un point: trois lignes droites, dont aucunes ne sont paralleles, se peuvent couper dans trois points; quatre lignes droites, dans les mêmes conditions qu'il n'y a point de paralleles, peuvent se couper dans six points, et ainsi de suite selon la loi des nombres 1, 3, 6, 10, 15, 21, etc. et qu'on nomme les nombres triangulaires.

Des lignes concourantes.

19. Lorsqu'une ligne CD rencontre une ligne droite AB, elle ne peut encore avoir que deux positions à l'égard de cette même ligne: car ou elle ne penche pas plus vers A que vers B, et dans ce cas on dit qu'elle est *perpendiculaire* sur AB; ou bien elle est plus inclinée vers A que

vers B, (*fig.* 4 et 5), et dans ce cas on dit qu'elle est *oblique* ou *inclinée* sur AB.

20. Quelle que soit la position d'une ligne CD à l'égard d'une droite AB, dès lors qu'elles se rencontrent, elles forment, au point où elles se coupent, ce que l'on appelle un *angle*, qui n'est autre chose que *l'espace indéfini renfermé entre deux lignes qui se rencontrent.* On peut dire également que *l'angle est l'inclinaison d'une ligne sur une autre*, ou *l'ouverture de ces mêmes lignes.*

Si la ligne CD est perpendiculaire sur AB, les angles ACD et BCD seront égaux, et chacun se nomme *angle droit;* si, au contraire, la ligne CD est inclinée sur AB, elle forme des angles inégaux : l'un ACD plus petit qu'un droit, il s'appelle *aigu*; l'autre BCD plus grand qu'un droit, et qu'on nomme *obtus.* Le point où les lignes se coupent se nomme le *sommet de l'angle*, et les lignes CA, CD, ou CB, CD, se nomment les *côtés* de cet angle. Lorsqu'il y a plusieurs angles autour d'un point, il faut absolument désigner chacun de ces angles par trois lettres, dont celle qui est au sommet occupe le milieu; comme dans la *figure* 2, pour marquer l'angle formé par les lignes AC, AB, il faut dire l'angle BAC pour le distinguer de tous les autres angles : mais, dans la *figure* 6, on pourroit désigner l'angle ACD par la seule lettre C qui est à son sommet.

COROLLAIRE I.

21. Il suit de cette définition que la grandeur d'un angle ne dépend nullement de la grandeur

de ses côtés, mais uniquement de leur inclinaison au point où elles se coupent. Par exemple, l'angle ACD (*fig.* 6) est plus grand que l'angle *acd*, quoique les côtés AC, CD du premier soient plus petits que ceux *ac*, *cd* du second, parceque l'ouverture des côtés du premier est plus grande que celle des côtés du second.

COROLLAIRE II.

22. Il suit encore de la définition de l'angle qu'il n'y a pas d'autres angles que ceux qui sont formés par des lignes droites, et qu'il ne peut y avoir d'angles *curviligne* ou *mixtiligne*, c'est-à-dire dont les côtés seroient deux lignes courbes, ou bien une ligne courbe et une ligne droite. Si cependant on trouve de pareils angles comme aux *figures* 7 et 8, il faut, pour en avoir la valeur, les ramener à la considération des angles formés par les tangentes aux points où ces lignes se coupent. On pourroit admettre cependant ces dénominations pour distinguer plus facilement les parties d'une figure où il s'en trouveroit de cette espece, pourvu qu'on n'imagine pas que ces angles soient d'une autre nature que ceux formés par les lignes droites tangentes à ces courbes à leur point d'intersection.

DÉFINITIONS.

23. Outre les trois especes d'angles que nous venons de donner, le droit, l'obtus et l'aigu; il y a encore d'autres dénominations qu'il faut expliquer ici. 1°. Lorsqu'un angle ACD joint avec un autre DCF fait un angle droit (*fig.* 5), on

dit que l'un est *complément* de l'autre, ou que le second est complément du premier. 2°. Si deux angles ACD, BCD, pris ensemble, valent deux droits, le premier est dit *supplément* du second, et le second réciproquement supplément du premier. 3°. Lorsqu'une ligne CD tombe obliquement sur une droite AB, les deux angles aigu et obtus, comme ACD, BCD, sont nommés *angles de suite,* et ces angles sont toujours suppléments l'un de l'autre : car, en élevant sur AB la perpendiculaire CF, on voit que l'angle aigu ACD vaut un droit moins l'angle DCF ; et l'obtus BCD vaut un droit, plus le même angle DCF.

COROLLAIRE I.

24. Il suit de-là que si, en mesurant deux angles ACD, BCD, qui ont un côté commun CD, on trouve qu'ils fassent ensemble deux droits, on en pourra conclure que CB et CA sont une seule et même ligne droite. Si, au contraire, ces deux angles pris ensemble font plus ou moins que deux droits, CB ne sera pas en ligne droite avec CA (*fig.* 5).

COROLLAIRE II.

25. Il suit des mêmes définitions que tous les angles tels que BAC, CAE, EAF, FAG, GAD et BAD, que l'on peut former autour d'un point, ne valent que quatre angles droits : car, concevant au point A (*fig.* 2) une perpendiculaire sur AB, elle formera quatre angles droits avec cette ligne, deux au-dessus et deux au-dessous ; et toutes les lignes que l'on pourra mener par le point A sur

le même plan, ne feront que partager ces quatre angles droits en d'autres angles plus petits, sans que leur somme puisse augmenter de valeur.

SCHOLIE.

26. Tous les ouvriers qui s'occupent de compartiments, sont obligés de s'astreindre à cette regle pour que l'espace autour d'un point et dans un même plan soit exactement rempli. C'est aussi par une suite nécessaire de ce principe, que l'on ne peut employer que certaines figures régulieres pour carreler les appartements.

COROLLAIRE III.

27. Il suit encore de-là que des angles égaux ont des compléments ou des suppléments égaux; et que si deux ou plusieurs angles ont des compléments ou des suppléments égaux, ils sont égaux nécessairement.

THÉORÊME I.

28. *Si deux lignes droites* AB, DE, *se coupent dans un point* C, *les angles opposés au sommet tels que* ACD, BCE, *ou* ACE, BCD, *et formés par ces mêmes lignes, seront égaux* (*fig.* 9).

DÉMONSTRATION.

Puisque la ligne DC tombe obliquement sur AB, les angles de suite ACD, BCD, pris ensemble, valent deux droits (n°. 23). Pareillement, puisque la ligne BC tombe obliquement sur la droite DE, les angles de suite BCE et BCD, pris ensemble, valent deux droits. Donc le même angle

angle BCD est supplément des angles ACD, BCE, opposés au sommet; donc ces angles sont égaux (n°. 24).

On prouvera de même que les angles ACE, BCD, ayant le même angle ACD pour supplément, sont égaux. Donc si deux lignes droites se coupent, les angles aigus ou obtus, opposés au sommet et formés par ces mêmes lignes, sont égaux. C. Q. F. D.

On peut encore appercevoir la vérité de ce théorême d'une autre maniere : car, si l'on imagine que la ligne DE, originairement couchée sur AB, vienne à s'écarter de sa premiere position en tournant sur un de ses points quelconque C comme sur une charniere; à cause que le mouvement est nécessairement égal à égales distances du centre, il est évident que la partie CD ne peut s'élever sans que l'autre partie CE ne s'abaisse de la même quantité, ce qui constitue nécessairement l'égalité des angles opposés au sommet.

THÉORÈME II.

29. *Si quatre angles* ACD, BCE, ACE, BCD, *opposés au sommet, sont égaux; je dis que les lignes qui les forment sont deux lignes droites.*

DÉMONSTRATION.

Puisque l'on a par hypothese ACD = BCE, et ACE = BCD; en ajoutant les premiers et seconds membres de ces égalités, on aura ACD + ACE = BCE + BCD : mais à cause que tous les angles autour d'un point valent quatre droits

(n°. 25), il s'ensuit que ACD + ACE valent deux droits; donc CE est en ligne droite avec CD (n°. 24). Si au contraire on ajoute en croix les membres de ces deux égalités, on aura ACD + BCD = BCE + ACE: d'où il suit que ces deux sommes valant chacune deux droits, les lignes CA, CB, ne font qu'une seule et même ligne droite.

Donc si quatre angles, opposés au sommet deux à deux, sont aussi égaux deux à deux; les lignes qui les forment sont des lignes droites. C. Q. F. D.

THÉORÈME III.

30. *Si deux angles* ACD, BCE, *opposés au sommet, sont égaux; et que de plus deux de leurs, côtés* AC *et* CB *soient en ligne droite; je dis que les deux autres côtés* CD, CE *seront aussi en ligne droite.*

DÉMONSTRATION.

Puisque, par hypothese, les deux côtés AC et CB sont en ligne droite, on aura (n°. 24) ACD + BCD = deux droits; et parceque l'on suppose aussi ACD = BCE, en leur ajoutant le même angle BCD, on aura ACD + BCD = BCE + BCD: donc BCD est aussi supplément de BCE; donc les angles BCE, BCD, pris ensemble, valent deux droits; donc aussi les lignes CD, CE ne font qu'une seule et même ligne droite. C. Q. F. D.

CHAPITRE III.

Définitions du cercle et des principales especes de lignes qu'on y considere ; de la division de sa circonférence, et de son usage dans la mesure des angles ; maniere de se servir des arcs de cercle pour trouver des points à égales distances de points donnés.

Ire. *Le cercle est une surface plane, terminée par une seule ligne courbe* ADBILA, *qu'on nomme circonférence* (*fig.* 10), dont tous les points sont à égales distances d'un point C, placé au-dedans de cette figure, et qu'on appelle le *centre du cercle.*

IIme. *Toutes les lignes menées du centre à la circonférence*, comme CA, CD, CB, etc. sont nommées *rayons ;* d'où il suit que tous les rayons d'un même cercle sont égaux.

IIIme. Une ligne droite comme ACB, terminée à deux points opposés de la circonférence, et passant par le centre, se nomme *diametre,* parce qu'en effet elle passe par le milieu du cercle qu'elle divise en deux parties égales ; d'où il suit aussi que tous les diametres sont égaux dans un même cercle, puisque tout diametre est double du rayon.

IVme. Une ligne FG qui coupe une circonférence en deux points I, L, se nomme *sécante.* La portion de cette ligne, terminée à deux points I,

L, de la circonférence, se nomme *corde ;* et la portion de circonférence, déterminée par cette corde, soit au-dessus, comme IDL, soit au-dessous, comme IKL, se nomme *arc de cercle.*

Vme. Une ligne comme BE qui n'a qu'un point de commun avec la circonférence d'un cercle se nomme *tangente.*

VIme. Une portion de la surface du cercle, terminée par un arc IL, et par deux rayons CI, CL, qui aboutissent aux deux extrémités de cet arc, se nomme un *secteur de cercle.* Tant que l'arc est plus petit que la demi-circonférence, le secteur est plus petit que le demi-cercle. Si l'arc est plus grand qu'une demi-circonférence, le secteur est plus grand que le demi-cercle.

VIIme. Une portion de la surface du cercle terminée par un arc et par une corde, se nomme *segment de cercle.* Toute corde qui ne passe pas par le centre divise le cercle en deux segments inégaux : l'un plus petit que le demi-cercle, comme IKL, qu'on nomme *petit segment;* l'autre, plus grand comme IBDAL, on le nomme *grand segment.*

31. Outre les lignes dont on vient de parler, on en considere encore un grand nombre dont on donnera les définitions par la suite. Occupons-nous un moment des rapports de la circonférence du cercle et de ses parties avec la mesure des angles.

Usages de la circonférence du cercle dans la mesure des angles.

32. Si l'on conçoit qu'une ligne CD (*fig.* 10), originairement couchée sur CA, vienne à s'en écarter en tournant sur l'un de ses points C, comme autour d'une charniere; il est visible 1° que tous ses points décriront dans ce mouvement des circonférences de cercles qui auront toutes le même centre, et que, pour cette raison, l'on nomme *concentriques;* 2° que, dans ce mouvement, elle passe par toutes les inclinaisons possibles à l'égard de la même ligne CA; 3° que les arcs compris entre la ligne AC et CD dans ces différentes positions, augmentent dans la même proportion que l'ouverture des angles que cette même ligne CD forme avec AC. Donc les arcs sont des quantités essentiellement propres à donner la mesure des angles; aussi de tout temps ont-ils été employés à cet usage.

33. Pour le faire avec plus de précision, on a divisé toute circonférence en 360 parties égales qu'on nomme *degrés.* Chaque degré se divise encore en 60 parties égales qu'on nomme *minutes*, chaque minute en 60 *secondes*, et chaque seconde en 60 *tierces*, et ainsi de suite. Chacune de ces subdivisions a un signe qui lui est propre: ainsi pour exprimer qu'un angle est d'un certain nombre de degrés, minutes et secondes, comme s'il étoit de 37 degrés, 49 minutes, 58 secondes et 26 tierces, on écriroit $37^{\circ}\ 49'\ 58''\ 26'''$.

34. On voit, par les définitions précédentes,

que la division de la circonférence en minutes équivaut à une division de cette même circonférence en 21600 parties égales; que celle des secondes équivaut à une subdivision 1296000; et qu'enfin la circonférence divisée en tierces en contiendroit 77760000. Les opérations les plus délicates de l'astronomie permettent à peine d'estimer un angle à la seconde. Un arc d'une seconde sur la surface de la terre, et sur un grand cercle, est à-peu-près de 16 toises pour un rayon d'environ 1500 lieues. Ainsi, dans la pratique et dans les opérations sur le terrain, on seroit fort heureux de mesurer les angles à la minute.

35. On voit encore, par les définitions précédentes, que chaque degré, minute et seconde, sont bien des quantités fixes et déterminées dans chaque cercle; mais que ces mêmes lignes ou petits arcs varient, dans leurs grandeurs absolues, comme les rayons des cercles auxquels elles appartiennent; en sorte que *la valeur d'un angle ne se mesure pas tant par la grandeur absolue de l'arc compris entre ses côtés, que par le rapport de cet arc au rayon; rapport qui sera toujours le même pour un même angle, quel que soit le rayon dont on se serve pour le mesurer.*

36. Les instruments en usage pour mesurer les angles sont 1°. le rapporteur, qui n'est autre chose qu'un demi-cercle divisé en 180 parties égales, lorsqu'il marque les degrés, et en 360 lorsqu'il donne les demi-degrés; 2° le graphometre, dont on se sert pour mesurer les angles sur le terrain, et dont nous donnerons une

description plus détaillée dans la trigonométrie; 3°. le compas de proportion, dont nous enseignerons l'usage lorsque nous aurons donné les connoissances nécessaires à sa construction; 4°. enfin des tables calculées pour cet objet spécial, et dont nous développerons la nature et la construction. Cette derniere maniere est une des plus parfaites dont on puisse faire usage. Néanmoins nous allons montrer dans le problême suivant une maniere des plus ingénieuses de mesurer les angles, et même avec une précision qu'on n'auroit pas droit d'attendre des méthodes purement graphiques

PROBLÊME.

37. *Etant donné un angle quelconque* BAC, *mesurer cet angle, et déterminer sa valeur réelle à une seconde près* (*fig.* 20).

SOLUTION.

Ayez sur un plan solide et très uni une circonférence entiere, divisée en diverses parties égales par les nombres 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 24, 30, 48, etc. avec le plus de précision possible, et sur un rayon fini et déterminé. Ayant ensuite, du sommet de votre angle à mesurer, avec le même rayon, décrit un arc de cercle compris entre ses côtés; prenez le plus exactement qu'il vous sera possible la grandeur de la corde de cet arc; puis à partir d'un point de o sur votre circonférence, divisée comme il est dit ci-dessus, portez l'ouverture de cette corde; et comptez jusqu'à ce que vous tombiez sur quelqu'une des di-

visions exactes dans lesquelles votre cercle est divisé ; marquez soigneusement combien vous aurez fait de révolutions, ainsi que le nombre de fois que vous aurez porté la corde sur la circonférence, ainsi augmentée d'un de ses multiples, plus une de ses parties aliquotes quelconques, et divisez cette premiere quantité par le nombre de fois que la corde est contenue dans la somme des circonférences déja trouvées, plus cette même partie aliquote ; le quotient donnera, à la seconde près, la valeur de l'angle ; et même à la tierce s'il étoit nécessaire.

Exemple. Ayant pris l'arc DF de l'angle que nous voulons mesurer, et décrit d'un rayon égal à la circonférence qui doit servir de matrice pour la mesure de tous les angles, supposons qu'après l'avoir porté 37 fois, on soit tombé sur un douzieme de la circonférence ; ayant d'ailleurs épuisé 4 fois la circonférence entiere, on aura donc 37 fois la valeur de l'arc égal à $4\times360°+30°=1470°$; divisant cette somme par 37, il vient au quotient $39°\ 43'\ 47''\frac{1}{37}$ pour la valeur de l'angle à mesurer.

38. On est redevable de cette méthode au savant astronome *Tobie Mayer*, qui l'a publiée dans les mémoires de l'académie de Berlin. Elle se trouve dans la nouvelle édition des récréations de mathématiques d'Ozanam, infiniment supérieure aux autres par le choix des problêmes qui y sont présentés, et par la maniere dont chaque objet a été traité. C'est d'après ce principe que l'on a fait exécuter un cercle entier pour mesurer les angles sur le terrain, et dont nous parlerons dans la trigonométrie.

CHAPITRE IV.

Des différentes manieres d'élever des perpendiculaires, suivant des conditions données.

THÉORÊME I.

39. *Si une ligne droite* CF *est perpendiculaire au milieu d'une droite* AB (*fig.* 11), *tout point* D *pris dans cette perpendiculaire sera à égales distances des extrémités de cette même ligne* AB.

DÉMONSTRATION.

Concevons que la figure soit pliée le long de la droite CF : à cause de l'égalité des angles ACF, BCF, il est de toute nécessité que CB tombe sur CA; et parceque le point C est le milieu de la ligne AB, le point B tombera sur le point A; mais le point D est commun aux deux lignes : donc elles se confondront dans leurs extrémités; donc on aura AD=DB, et comme on démontrera la même chose pour tout autre point de la ligne CF; il est démontré que si une ligne tombe perpendiculairement sur le milieu d'une autre, elle aura tous ses points à égales distances des extrémités de cette même ligne. C. Q. F. D.

THÉORÊME II.

40. *Si une ligne droite* CF *a tous ses points à*

égales distances des extrémités d'une droite AB, *elle lui sera nécessairement perpendiculaire.*

DÉMONSTRATION.

Ayant tiré d'un point D les lignes DA et DB, ces lignes seront égales, ainsi que les lignes CA et CB; enfin la ligne CD étant aussi égale à elle-même, il est visible que les angles DCA et DCB sont déterminés de la même maniere; donc il n'y a aucune raison pour qu'ils ne soient pas égaux; donc chacun de ces angles est droit, et par conséquent CF est perpendiculaire sur AB. C. Q. F. D.

THÉORÊME III.

41. *Si une ligne droite* CF *est perpendiculaire sur le milieu d'une droite* AB, *tout point* G *qui ne sera pas dans la perpendiculaire ne sera pas à égales distances des extrémités de la ligne* AB.

DEMONSTRATION.

D'un point quelconque G aux extrémités de la ligne AB (*fig.* 12) soient menées les lignes GA et GB, dont la premiere coupe CF dans un point D, duquel soit encore tirée la ligne DB.

Cela posé, par le n° 39, on aura AD = DB: ajoutant DG à chaque ligne, on aura AD + DG, ou AG = BD + DG; mais BD + DG, ligne brisée, est plus grande que BG; donc aussi AG est plus grande que BG. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

42. Donc tout point également éloigné des

extrémités d'une droite AB est dans la perpendiculaire au milieu de cette ligne; et parceque deux points suffisent pour déterminer la position d'une ligne droite, pour élever une perpendiculaire sur une ligne droite il suffira de trouver deux points à égales distances de deux autres points pris dans cette même ligne.

Problême I.

43. *Élever une perpendiculaire au milieu d'une droite* AB (*fig.* 13).

Solution.

Des points A et B comme centre, avec une ouverture de compas plus grande que la moitié de la ligne AB, décrivez au-dessus et au-dessous de cette même ligne deux arcs de cercle RS, TV, et *rs*, *tu*, qui se coupent aux points déterminés F et *f*. La droite FC*f* qui passera par ces deux points, sera la perpendiculaire demandée, comme il est évident par les nos 39 et 42. C, Q, F, T et D.

Scholie.

44. Si l'on ne pouvoit pas tracer au-dessous de AB les arcs *rs*, *tu*; parceque la même ligne seroit trop près du bord du papier, on n'auroit qu'à chercher un autre point D à égales distances de A et de B, au moyen de deux arcs *mn*, *op* décrits des mêmes points A et B comme centres, avec un nouveau rayon plus petit ou plus grand que celui qui a donné le point F. Ce point sera toujours un des points de la perpendiculaire au milieu de AB.

PROBLÈME II.

45. *Une ligne droite* AB *et un point* D *étant donnés de position sur le même plan, mener par ce point une ligne perpendiculaire à la droite* AB (*fig.* 14).

SOLUTION.

Du point donné D comme centre et d'une ouverture de compas à volonté, soit décrite une portion de circonférence qui coupe la ligne donnée AB en deux points F et G. De ces points donnés comme centre avec le même rayon, ou d'une autre ouverture de compas, soient décrits deux arcs de cercle *rs*, *tu*, au-dessous de AB, qui se coupent dans un point déterminé L; par ce point L et le point donné D, on fera passer la ligne DL qui sera la perpendiculaire demandée, comme il suit évidemment de la construction et du n° 42. C. Q. F. T. et D.

SCHOLIE.

46. On remarquera, comme au problème précédent, que si l'on ne pouvoit tracer les arcs *rs*, *tu*, au-dessous de AB; il faudroit chercher au-dessus de la même ligne un autre point O, au moyen de deux arcs *mn*, *op* décrits des points F et G comme centre, avec un même rayon plus grand ou plus petit que le rayon DF.

Si le point donné se trouvoit sur la ligne AB elle-même, comme en D', l'opération se feroit toujours de la même maniere, en prenant de part et d'autre de ce point des lignes égales D'F,

D'G; et des points F et G comme centre avec un même rayon, on traceroit comme ci-dessus deux arcs de cercles qui se couperoient en quelque point L ou O, par lequel et le point donné D on meneroit la perpendiculaire demandée.

PROBLÈME III.

47. *Une ligne droite* AB *et un point* D *vers l'extrémité de la ligne* AB *étant donnés; supposant de plus qu'on ne puisse prolonger la ligne* AB *également de part et d'autre du point donné* D; *on demande de mener par le point* D *une perpendiculaire à la ligne* AB (*fig.* 15).

SOLUTION.

D'un point G quelconque de la ligne AB (on le prend communément directement au-dessous du point donné D) avec un rayon GD, on décrira un arc de cercle indéfini *rs* au-dessous de AB; ensuite d'un autre point F de la ligne AB avec un rayon égal à FD, on décrira un nouvel arc *tu*, qui coupe le premier en un point déterminé L; enfin par le point D et le point L ainsi déterminé, on tirera la droite DL, qui sera la perpendiculaire demandée.

Car, par construction, les points F et G de la ligne AB sont à égales distances des points D et L de la droite DL; donc AB est perpendiculaire sur DL, et par conséquent aussi DL est perpendiculaire sur AB. D'ailleurs cette ligne passe par le point donné D; donc elle a toutes les conditions requises au problème. C. Q. F. T. et D.

SCHOLIE.

48. On pourroit encore aux conditions du problême précédent ajouter que l'on ne fût pas le maître de trouver un point L au-dessous de AB; ou bien encore dans la même derniere supposition imaginer que le point donné D est sur la ligne AB, et demander d'abaisser ou d'élever par ce point une perpendiculaire à la ligne AB. Mais comme la solution de ces deux questions dépend de principes que nous n'avons pas encore exposés, nous les donnerons par la suite; ce qui complétera tout ce que l'on peut dire sur la maniere de mener une perpendiculaire à une ligne donnée, dans quelques conditions que cela puisse avoir lieu.

THÉORÊME IV.

49. *Si d'un point* D *pris au-dehors d'une droite* AB, *on mene à cette même plusieurs lignes droites, telles que* DF, DG, DI, DL; *je dis que la perpendiculaire* DF *est la plus courte, et que de deux obliques* DI, DL, *celle qui s'éloigne le plus de la perpendiculaire est la plus longue* (*fig.* 17).

DÉMONSTRATION.

Soit prolongée la perpendiculaire DF jusques en C, de maniere que l'on ait CF = DF; et soient menées au point C les droites ponctuées CG, CI, CL. Cela posé, il suit nécessairement de cette construction que la ligne AB est perpendiculaire au milieu de CD; donc elle passe par

tous les points à égales distances de C et de D; donc on aura CG = DG, CL = DL, CI = DI. Mais toutes les lignes brisées DGC, DLC, DIC, sont toutes plus grandes que DC; donc en prenant les moitiés, on aura aussi les lignes DG, DL, DI, toutes plus grandes que DF; et parceque (n°. 16) DIC est plus grande que DLC, en prenant encore la moitié de chacune, on aura DI plus grand que DL. C. Q. F. 1° et 2° D.

Corollaire I.

50. Il suit de cette proposition que si une ligne est la plus courte de toutes celles que l'on peut mener d'un point hors d'une ligne à cette même ligne, elle lui sera perpendiculaire; et si une ligne oblique est plus longue ou plus courte qu'une autre ligne oblique, menée du même point à une même droite, elle sera aussi plus loin ou plus près de la perpendiculaire.

Corollaire II.

51. Puisque la perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener d'un même point à une même droite, et que de plus il n'y a pas plusieurs lignes qui soient les plus courtes, il s'ensuit que d'un point pris au-dehors d'une ligne droite AB, on ne peut abaisser sur cette ligne qu'une seule perpendiculaire.

Corollaire III.

52. Donc si deux lignes sont chacune perpendiculaires à une même droite, elles ne pourront jamais se rencontrer, et seront parallèles. Car, si

elles pouvoient se rencontrer, il y auroit un po duquel on pourroit abaisser sur une même lig deux perpendiculaires; ce que l'on vient de d montrer impossible.

COROLLAIRE IV.

53. Il suit encore de-là que d'un même poi à une même ligne, on ne peut pas mener tro lignes égales. Car, il est évident que la perpend culaire ne peut pas être l'une de ces trois ligne égales, puisqu'elle est plus courte qu'aucune d autres; l'on ne peut pas supposer non plus qu ces trois lignes égales soient trois lignes oblique puisque celles-là seules qui sont à égales distanc de chaque côté de la perpendiculaire sont égales et que toute autre seroit nécessairement plu grande ou plus courte.

COROLLAIRE V.

54. Donc une ligne droite ne peut pas coupe une circonférence dans trois points. Car, si cel pouvoit arriver, à cause que tous les points de l circonférence sont à égales distances du centre et que selon notre supposition ces points seroien communs à la ligne droite et à la circonférenc qu'elle couperoit dans ces mêmes points, o pourroit donc mener de ce centre trois ligne égales à une même ligne droite, ce que l'on vien de démontrer impossible.

COROLLAIRE VI.

55. Donc si une ligne droite AB (*fig.* 18) est perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon CD, elle

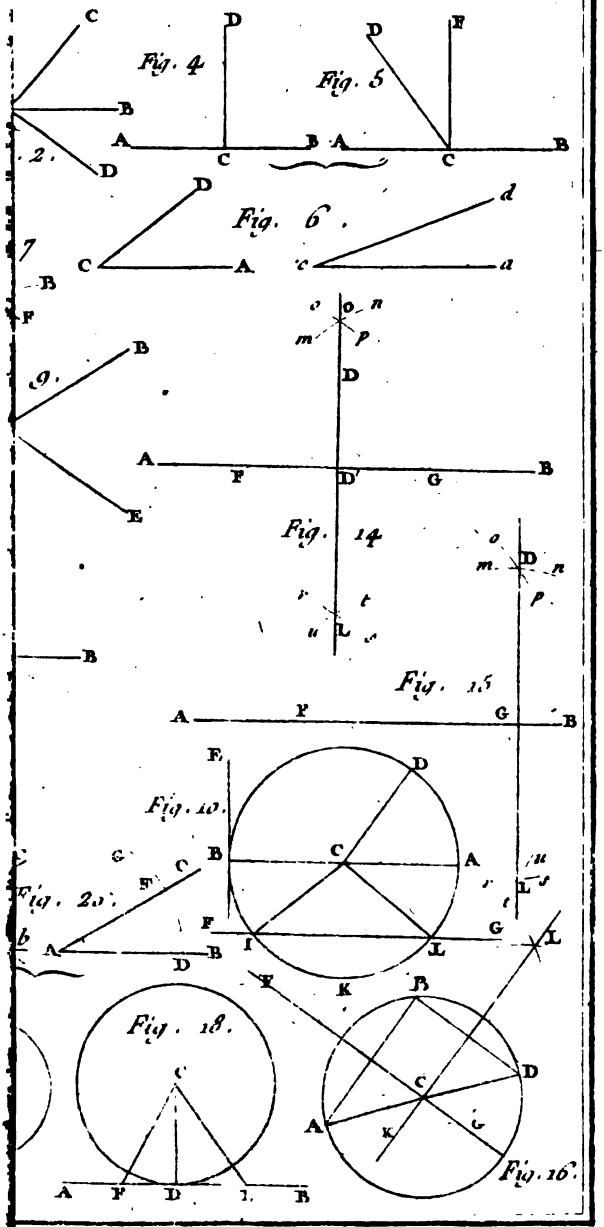


Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 10.
Fig. 20.
Fig. 18.
Fig. 16.

elle touchera la circonférence au seul point D. Car, puisque AB est perpendiculaire au rayon CD, réciproquement CD est perpendiculaire sur AB, et par conséquent plus courte qu'aucune autre ligne telle que CF ou CL; donc la ligne AB n'a que le seul point D de commun avec la circonférence; ce qui constitue l'essence d'une tangente au cercle. *Ainsi toute ligne perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon, est une tangente à la circonférence du cercle en ce point.*

On voit donc ce qu'il faut faire pour mener une ligne droite qui touche la circonférence d'un cercle en un point donné D; et réciproquement, supposant qu'une droite AB soit tangente d'un cercle, pour déterminer le point précis où se fait le contact, il n'y a qu'à mener du centre C une perpendiculaire CD à la droite AB.

COROLLAIRE VII.

56. *Donc si deux circonférences de cercle* X *et* Z, *ou* X *et* Z', *se touchent par dehors ou par dedans; les centres* C, *c, ou* C, *c', et les points d'attouchement* D, D', *seront dans une seule et même ligne droite.*

Car, ayant mené au point de contact D, ou D', la tangente AB ou A'B' (*fig.* 19), cette ligne sera une tangente commune à chaque circonférence, et les rayons CD, *c*D seront chacun perpendiculaire à la droite AB (n°. 55); donc à cause que les angles CDB, *c*DB de suite sont chacun droit, suivant le (n°. 24) CD, *c*D seront dans une seule et même ligne droite, lorsque les cercles se touchent par dehors; et lorsque les cir-

conférences se touchent par dedans, ayant mené le rayon CD' au point du contact commun, ce rayon sera perpendiculaire à la tangente AB (n°. 55); et si ce même rayon n'étoit pas confondu avec le rayon *c'* D', il seroit vrai de dire que par un même point on pourroit élever deux perpendiculaires à une même ligne; ce qui seroit absurde.

57. Nous ferons par la suite un grand usage de ce principe pour tracer toutes sortes de courbes en usage dans les arts; mais nous aurons encore occasion de le déduire d'un autre théorême auquel il a un rapport plus immédiat. Passons à la solution de quelques problêmes qui dépendent de tout ce qui précede.

PROBLÊME IV.

58. *Par trois points* A, B, D *donnés comme l'on voudra, faire passer une circonférence de cercle* (*fig.* 16).

ANALYSE ET SOLUTION.

Toute circonférence ayant tous ses points à égales distances du centre, la question se réduit à trouver un point à égales distances des trois points donnés A, B, D. Joignant ces points deux à deux, par des lignes AB, BD, ou AB, AD, ou AD, BD, je fais attention que toute ligne perpendiculaire au milieu de chacune de ces lignes passera nécessairement par le centre. Ce point se trouvera donc dans chacune de ces perpendiculaires : mais il est seul et unique de sa nature; il faut donc que ces lignes se coupent, et qu'il soit au point d'intersection; ce qui fournit cette solution.

Sur deux droites quelconques AB et BD, élevez des perpendiculaires indéfinies FG, KL, et qui les divisent en deux parties égales; le point C, où elles se couperont, sera le centre demandé.

Car, en tant que le point C est dans la perpendiculaire au milieu de AB, il est à distances égales du point A et du point B; et puisqu'il est aussi dans la perpendiculaire au milieu de BD, il est encore à égales distances de B et de D; donc il est également éloigné des trois points donnés A, B, D. C. Q. F. T et D.

SCHOLIE.

59. Il faut observer pourtant que si les trois points donnés se trouvoient en ligne droite, les perpendiculaires FG, KL, ne pourroient jamais se rencontrer, et par conséquent le problême deviendroit impossible; ou, ce qui revient au même, le rayon de ce cercle seroit infini. Remarquons encore que les trois points A, B, D, n'étant pas en ligne droite, après les avoir joints par les lignes AB, BD, AD, si on éleve au milieu de chacune une perpendiculaire, ces trois lignes se couperont dans un seul et unique point; car nous démontrerons par la suite que deux circonférences de cercles ne peuvent jamais se couper dans trois points, et que trois points n'appartiennent qu'à un seul et unique cercle; donc aussi le centre de ce cercle est seul et unique. On voit encore comment il faudroit s'y prendre pour retrouver le centre d'une circonférence donnée, et dont on ignoreroit la position.

PROBLÊME V.

60. *Avec une ligne donnée* AB (*fig.* 20), *faire un angle égal à un angle donné b a c.*

SOLUTION.

Du sommet *a* de l'angle donné avec un rayon quelconque, décrivez un arc de cercle *df* entre ses côtés : puis du point A comme centre avec la même ouverture de compas, décrivez un arc indéfini DG, sur lequel vous porterez l'ouverture de l'arc *df* de D en F ; enfin par les points A, F, vous tirerez la droite AF, qui fera l'angle BAC, égal à l'angle donné *bac;* puisque les angles qui ont des mesures egales sont égaux. C. Q. F. T et D.

SCHOLIE.

61. On se sert quelquefois du rapporteur et du compas de proportion pour résoudre le même problême. La pratique au rapporteur consiste à poser le centre de cet instrument au sommet de l'angle donné, et à diriger le diametre du cercle, qui passe par les points de 0 et de 180 sur l'un des côtés de l'angle ; et alors l'autre côté, s'il est assez long, indiquera sur le limbe du rapporteur les degrés de l'angle donné ; au moyen de quoi il n'y a plus de difficulté à faire le même angle au point A de la ligne donnée AB. On feroit la même chose avec la ligne des cordes du compas de proportion.

PROBLÊME VI.

62. *Diviser un angle donné* BAC *géométrique-*

ment en deux parties égales (*fig.* 21, *pl.* II).

SOLUTION.

Du sommet A de l'angle donné comme centre, ayant décrit un arc de cercle DF avec un rayon à volonté, et terminé aux côtés de l'angle; des points F et D comme centres avec un nouveau rayon, on décrira deux nouveaux arcs de cercle *mn, op* qui se couperont en un point G, par lequel et par le point A on tirera la droite AG, qui divisera l'angle BAC, et l'arc qui en est la mesure, en deux parties égales; puisque si l'on conçoit la corde FD, la droite AG sera perpendiculaire au milieu de cette même corde, et par conséquent passera par le milieu de l'arc DF, mesure de l'angle donné. C. Q. F. T et D.

SCHOLIE.

63. Si l'on opere de la même maniere sur chaque moitié de l'angle, déja divisé en deux également; on voit qu'il se divisera géométriquement en quatre parties égales; et par suite selon la progression des nombres 2, 4, 8, 16, 32, etc. Il n'en est pas de même lorsqu'il s'agit de diviser un arc quelconque en trois parties égales, sur-tout si l'on s'impose la loi de n'y employer que la regle et le compas. Il n'y a qu'un très petit nombre d'arcs qui soient susceptibles d'une division géométrique de cette nature. Le problême devient encore plus difficile, lorsqu'il faut diviser un arc quelconque en 5, 7, 9 ou 11 parties égales. Le problême est souvent impossible dans le sens des géometres par la

regle et le compas. Cela n'empêche pas que, dans la coupe des pierres, où l'on a souvent des problêmes de cette espece à résoudre, l'on ne regarde comme suffisamment exactes dans la pratique les méthodes de tâtonnement dont on fait usage. A l'égard de la trisection de l'angle, il y a pourtant une suite d'arcs où elle est possible avec la regle et le compas; nous aurons soin de les faire connoître.

CHAPITRE V.

Des lignes paralleles et de leurs propriétés.

DÉFINITIONS.

64. Ire. *Deux lignes* AB, DE, *sont paralleles, lorsque dans un même plan elles sont également inclinées d'un même côté sur une seule et même ligne droite* (*fig.* 22). IIme. La ligne FL qui coupe les paralleles se nomme *sécante;* elle forme visiblement huit angles avec les paralleles, quatre autour du point C, et quatre autour du point G. IIIme. Les angles tels que BCG, ACG, EGC, DGC, compris au-dedans de l'espace indéfini renfermé entre les paralleles, sont nommés *angles internes;* et ceux comme ACF, BCF, EGL, DGL au dehors des paralleles, sont nommés *angles externes.* IVme. Si en comparant deux angles quelconques l'un à l'autre, ils se trouvent avoir les conditions suivantes dans leurs positions respectives, en

sorte que l'un soit au-dessus de la sécante, et l'autre au-dessous de la même sécante; l'un à droite de l'une des paralleles, et l'autre à gauche de l'autre parallele; ils seront nommés *alternes* l'un à l'égard de l'autre. S'ils sont tous les deux au-dedans des paralleles avec les conditions ci-dessus, ils seront *alternes internes*; et *alternes externes*, s'ils sont tous deux au-dehors des paralleles. Cela posé, il sera facile d'établir toutes les propriétés des paralleles dans les théorêmes suivants.

THÉORÊME I.

65. *Si deux paralleles* AB, DE, *sont coupées par une même droite* FL, *je dis* 1°. *que les angles alternes internes, ou alternes externes sont égaux*; 2°. *que les angles internes ou externes d'un même côté, pris ensemble valent deux droits* (*fig.* 22).

DÉMONSTRATION.

1°. L'angle BCG est égal à DGC; car BCG est égal à EGL par la nature des paralleles. Mais EGL est égal à DGC; donc BGG est égal à DGC: de même AGF = BCG, puisqu'ils sont opposés au sommet. Mais BCG = EGL par la nature des paralleles; donc ACF = EGL; donc 1°. les angles alternes internes ou alternes externes sont égaux. C. Q. F. 1°. D.

2°. Les angles internes ou externes d'un même côté, pris ensemble, valent deux droits; car EGC + EGL valent deux droits (n°. 23): mais EGL = BCG, par la nature des paralleles; donc EGC + BCG = deux droits. On fera voir de même que BCF + EGL valent deux droits. Donc les angles

internes ou externes d'un même côté, pris ensemble, valent deux droits. C. Q. F. 2°. D.

THÉORÊME II.

66. *Deux lignes droites* AB, DE, *étant coupées par une troisieme droite* FL, *seront paralleles; 1°. si les angles alternes internes ou alternes externes sont égaux; 2°. si les angles internes ou externes d'un même côté, pris ensemble, valent deux droits.*

DÉMONSTRATION.

Dans tous les cas énoncés au présent théorême, il s'agit toujours de faire voir que les angles BCG, EGL, sont égaux; ce qui n'a aucune difficulté. En effet EGL = DGC (n°. 28). Mais par hypothese DGC = BCG; donc EGL = BCG. de même BCG = ACF. Mais par l'hypothese ACF = EGL; donc BCG = EGL; donc 1°. les lignes sont paralleles, lorsqu'étant coupées par une troisieme, elles le sont de maniere que les angles alternes internes, ou alternes externes, soient égaux. C. Q. F. 1°. D.

Pareillement EGL + EGC valent deux droits (n°. 23). Mais aussi par hypothese BCG + EGC valent aussi deux droits; donc EGL = BGC. De même encore BCF + BCG = deux droits (n°. 23). Mais par hypothese BCF + EGL valent aussi deux droits; donc BCG = EGL; donc encore les lignes sont paralleles, lorsque coupées par une troisieme elles le sont de maniere que les angles internes ou externes d'un même côté, pris ensemble, valent deux droits. C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE.

67. Il suit de ce qui précede qu'on aura autant de moyens de mener une ligne parallele à une autre, qu'il y a de propriétés essentielles aux lignes paralleles. Communément, c'est de leur égale inclinaison sur une même ligne et d'un même côté, ou de l'égalité des angles alternes internes, que l'on déduit la construction des lignes paralleles, comme on va le voir au problême suivant.

PROBLÊME I.

68. *Une ligne* AB *et un point* D *sur le même plan étant donnés, mener par ce point une parallele à la droite* AB (*fig.* 23).

SOLUTION.

Du point D à la ligne AB, soit menée une ligne droite quelconque DE; ensuite du point E comme centre avec le rayon DE (on pourroit également le faire plus petit ou plus grand), on tracera un arc de cercle DG; du même point donné D avec la même ouverture de compas, on décrira un autre arc de cercle indéfini EL; puis ayant mesuré l'ouverture de l'arc DG, on la portera sur l'arc EL de E en F, où l'on fera section. Enfin par les points D, F on menera la droite indéfinie DF, qui sera la parallele demandée, puisque par la construction les angles alternes internes DEG et FDE sont égaux. C. Q. F. T et D.

AUTRE SOLUTION.

69. On peut encore résoudre le même problême comme il suit : ayant pris avec le compas la plus courte distance du point donné D à la ligne AB (*fig.* 24), d'un autre point E de la même ligne AB, comme centre, avec cette même ouverture de compas, on décrira un arc de cercle vers F; enfin on tracera une ligne qui passe par le point D, et qui touche l'arc décrit du point E comme centre, et la ligne DF sera la parallele demandée.

SCHOLIE.

70. Dans la pratique, et sur-tout lorsque l'on a beaucoup de lignes paralleles à tracer, on se sert d'une regle et d'une équerre dont un des côtés est appliqué sur la regle, et dont l'autre côté est posé de maniere à couvrir la ligne donnée AB; ensuite on la fait glisser le long de la regle, de maniere que son côté réponde successivement aux points donnés, par lesquels on veut mener les paralleles que l'on trace en effet. Cette pratique porte avec elle sa démonstration : car il est évident que toutes les lignes ainsi tracées feront, avec la regle, des angles constamment égaux à celui des deux côtés de l'équerre.

Il y a aussi des regles qu'on nomme *paralleles*, destinées à tracer commodément et sûrement ces sortes de lignes. Les Anglois ont aussi inventé une regle mobile sur deux petites roulettes dentelées qui servent au même usage.

CHAPITRE VI.

Des lignes menées d'un point quelconque au-dedans ou au-dehors d'un cercle aux différentes parties de la circonférence; propriétés des circonférences qui se touchent par dedans ou par dehors; usage de cette propriété pour le tracé de certaines courbes, et de différentes moulures en usage dans l'architecture; de l'angle infiniment petit formé par la circonférence et la tangente.

THÉORÈME I.

71. *Si d'un point* A *quelconque différent du centre d'un cercle, pris au-dedans ou au dehors du cercle (fig. 25 et 26), on mene à la partie de la circonférence qui en est la plus éloignée des lignes droites, comme* AB, AD, AF, AG; *celle* AB *qui passe par le centre, est la plus longue; et celle comme* AF *qui s'éloigne le plus de celle qui passe par le centre, est la plus courte. 2°. Si du même point* A *on mene à la partie de la circonférence qui en est la plus proche, des lignes* A*b*, A*d*, A*f*, A*g*; *celle* A*b, dont le prolongement passe par le centre, est la plus courte; et celle* A*f qui s'en éloigne le plus est la plus longue.*

DÉMONSTRATION.

Du centre C, aux extrémités des lignes AD, AF, AG, soient menés les rayons CD, CF, CG,

dans l'une et dans l'autre figure ; ainsi que les rayons C*d*, C*f*, C*g*, aux extrémités des droites A*d*, A*f*, A*g*. On aura dans toutes deux AC+CB ou AB = AC + CD = AC + CF = AC + CG, puisque toutes ces lignes sont la somme d'une même droite AC et d'un rayon d'un même cercle : mais toutes les lignes brisées ACD, ACF, ACG, sont toutes respectivement plus grandes que les droites AD, AF, AG, terminées aux mêmes points ; donc aussi AB est plus grande qu'aucune de ces mêmes lignes.

Je dis de plus que la ligne AF, qui s'éloigne le plus de celle AB, qui passe par le centre, sera la plus courte : car on a la ligne brisée COD plus grande que CD ; donc aussi COD > que CF ; ôtant CO de part et d'autre, on aura OD > OF ; ajoutant AO, nous aurons AOD ou AD > AOF. Mais AOF, ligne brisée, est encore plus grande que AF ; donc à plus forte raison AD > AF, ou, ce qui revient au même, AF < AD. C. Q. F. 1°. D.

De même, lorsque les lignes sont menées du point A à la partie la plus proche de la circonférence, on a (*fig.* 25) toutes les lignes brisées CA*d*, CA*f*, CA*g*, toutes plus grandes que les rayons C*d*, C*f*, C*g*, qui aboutissent aux mêmes points ; toutes ces lignes seront donc aussi plus grandes que le rayon C*b* ; ôtant la même ligne CA de toutes ces lignes inégales, nous aurons A*d*, A*f*, A*g*, toutes plus grandes que la ligne A*b*, dont le prolongement passe par le centre.

Dans la *figure* 26, toutes les lignes brisées A*d*C, A*f*C, A*g*C, sont toutes plus grandes que la droite AC ; ôtant donc de part et d'autre des

rayons égaux, C*d*, C*f*, C*g*, C*b*; il faut que les restes A*d*, A*f*, A*g*, soient tous plus grands que A*b*.

De plus, à cause que (n°. 16) A*f*C > A*d*C, il s'ensuit que A*f* > A*d*, puisqu'il n'y a qu'à ôter de ces lignes inégales les rayons C*f*, et C*d*; donc celle qui s'éloigne le plus de la ligne A*b*, dont le prolongement passe par le centre, est la plus longue. Enfin, dans la *figure* 25, on a C*o* + *of* > C*f*, et par conséquent aussi C*o* + *of* > C*d*; ôtant C*o* de part et d'autre, nous aurons *of* > *od*; ajoutant encore A*o*, on a A*of* ou A*f* > A*od*. Mais A*od*, ligne brisée, est encore plus grande que A*d*; donc, à plus forte raison, A*f* > A*d*; donc de toutes les lignes qu'on peut mener d'un point A à la partie de la circonférence qui en est la plus proche, celle qui prolongée passe par le centre est la plus courte, et celle qui s'en éloigne le plus est la plus longue. C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE I.

72. Si le point A est sur la circonférence même du cercle, il est visible que le théorême est encore vrai pour la premiere partie seulement, c'est-à-dire que si d'un point quelconque A de la circonférence, on tire plusieurs cordes terminées à différents points de la même circonférence, celle qui passe par le centre est la plus longue, et celle qui s'en éloigne le plus est la plus courte; d'où il suit que le diametre est la plus grande de toutes les cordes.

COROLLAIRE II.

73. Il suit encore de ce théorême que *d'un point* A *qui n'est pas le centre d'un cercle, on ne peut pas mener à sa circonférence trois lignes égales.* Car on ne peut pas dire que de ces trois lignes égales, l'une soit celle qui passe par le centre; puisque, par le présent théorême, cette ligne est plus longue ou plus courte qu'aucune autre. On ne peut pas non plus supposer que de ces trois lignes égales, il y en ait deux d'un même côté de celle qui passe par le centre, et une de l'autre, puisqu'il n'y a que celles qui sont à la même distance de part et d'autre de celle qui passe par le centre, qui puissent être égales; et que si l'on en suppose deux d'un même côté, et à la même distance, elles n'en font qu'une seule.

COROLLAIRE III.

74. Donc si deux circonférences de cercle X et Y (*fig.* 27) se rencontrent en deux points D, E; elles se coupent nécessairement: car les rayons CD, CE, du cercle X étant égaux, sont également éloignés de l'extrémité B de la ligne CB, menée du point C, qui n'est pas le centre du cercle Y, à la circonférence de ce même cercle, et sont plus grands que CB, par le présent théorême; donc l'arc DBE est tout entier au-dedans du cercle X; donc ces deux circonférences se coupent réciproquement.

COROLLAIRE IV.

75. Si deux circonférences Y et Z (*fig.* 27 et 28) se touchent en un point B, par dehors ou par dedans; les centres G, C de ces deux cercles et les points d'attouchement sont dans une seule et même ligne droite. Car, puisque la ligne CB va du centre C du cercle Z au point où celui-ci touche le cercle Y, elle n'est pas obligée de sortir de sa circonférence pour rencontrer l'autre; elle est donc la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du même point C qui n'est pas le centre du cercle Y au même cercle; donc elle passera par le centre G de ce cercle; donc en général *si deux circonférences de cercle se touchent par dedans ou par dehors; les centres de ces cercles et les points d'attouchement sont dans une seule et même ligne droite.*

SCHOLIE.

76. C'est sur le dernier corollaire, déja démontré (n°. 56), qu'est fondée la pratique et la théorie du tracé des moulures et de plusieurs courbes en usage dans l'architecture et dans les arts, telles que les *talons*, les *doucines*, les *volutes*, les *arcs rampants*, les *scoties*, les *anses de panier*, et autres. Donnons ici la maniere d'en tracer quelques unes.

PROBLÊME I.

77. *Entre deux paralleles* AB, CD (*fig.* 29 et 30), *et sur une saillie donnée* BK, *décrire un talon ou une doucine* BGD *par deux arcs de cercle égaux.*

SOLUTION.

Il faut observer que, pour l'agrément de ces sortes de courbes, il est nécessaire que la naissance et la fin de la courbe soient perpendiculaires aux lignes AB, CD, si c'est un talon; et que les mêmes extrémités aient pour tangentes les droites AB, CD, si c'est une doucine; donc dans le premier cas les centres F, L doivent se trouver dans les paralleles AB, CD; et dans le second cas, les centres doivent être dans des lignes perpendiculaires à ces mêmes droites aux points B et D. Cela posé, il sera facile de décrire chacune de ces courbes.

Ayant joint la ligne BD, on la divisera en deux parties égales au point G; puis ayant élevé une perpendiculaire au milieu de l'une de ces moitiés, comme BG, le point F où cette ligne coupera la droite AB, sera le centre de la premiere partie du talon (*fig.* 29), et le point L où cette ligne prolongée coupera CD, aussi prolongée, sera celui de la seconde partie. Si c'est une doucine, le point F se trouvera sur une ligne perpendiculaire à l'extrémité B de la ligne AB, et le point L sur la ligne DK perpendiculaire à l'extrémité D de la ligne CD. Décrivant donc de ces points ainsi trouvés, comme centres, avec des rayons égaux, des arcs égaux BG, DG, qui se toucheront en G, les deux courbes seront décrites. C. Q. F. T et D.

PROBLÊME II.

78. *Sur une ligne donnée* AD, *inclinée à l'horizon*

rizon (*fig.* 31), *tracer un arc rampant* AFD *par deux seules ouvertures de compas.*

SOLUTION.

Ayant mené l'horizontale AB, terminée en B par une perpendiculaire abaissée du point D; au point C, milieu de AD, élevez une autre perpendiculaire indéfinie sur cette ligne, sur laquelle vous prendrez CF égale à CA ou CD; et tirez AF. Par le milieu K de cette dernière et le point C, menez la droite KCG jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne horizontale en G; et de ce point, comme centre, décrivez l'arc AF: puis ayant mené le rayon GF, et la droite DO parallele à AB qui le coupe en O; de ce dernier point comme centre, avec le rayon OF qui se trouvera toujours égal à OD, décrivez un second arc de cercle FD, qui achevera l'arc rampant demandé. C. Q. F. T et D.

On pourroit faire usage de cette même construction, pour décrire sur AD comme diametre une espece d'ovale en traçant au-dessous de AD une portion semblable à celle décrite dessus.

PROBLÊME III.

79. *Entre deux droites* AB, DE *paralleles* (*fig.* 32), *décrire une scotie, composée de quatre arcs de cercles qui se touchent.*

SOLUTION.

Ayant abaissé la perpendiculaire B*b* sur DE, et pris BC égale au tiers de B*b* ou à peu près; de ce point, comme centre, on tracera un quart de cercle BF. Sur FC, prolongée d'environ le quart

de cette ligne avec le rayon GF, on décrira un second arc de cercle FK du point G, comme centre; ensuite ayant prolongé le rayon GK en I, tel que IG soit à peu près le tiers de GK, sur une ligne OE perpendiculaire à l'extrémité de la ligne DE, on prendra EL = IK, et l'on tirera la droite IL. (Pour que le problême soit possible, il faut que cette derniere ligne soit inclinée à la droite DE; autrement il faudroit changer la proportion des premiers rayons.) Sur le milieu de cette ligne, élevez une perpendiculaire qui coupera la droite EL dans un point O, par lequel on menera la droite OI, qui déterminera l'extrémité M du troisieme arc de cercle KM; enfin de ce point O comme centre, avec le rayon OM, on tracera l'arc ME, qui achevera la courbe à décrire. On voit aisément que cette courbe n'a aucun jarret, puisque les arcs de cercle dont elle est composée se touchent tous aux points de réunion, à cause que leurs centres et les points d'attouchement sont dans une même ligne droite, par construction. C. Q. F. T et D.

80. On tracera de même une espece de spirale ou volute (*fig.* 33), en observant que les centres C, D, G, I des différents arcs de cercle dont cette courbe est composée, soient avec les points d'attouchement dans une même ligne droite. En général, on pourroit faire usage du même principe pour unir ensemble différentes portions de courbes, autres que des arcs de cercles; en sorte qu'elles paroissent n'en former qu'une seule, lorsque l'on aura opéré de maniere que les tangentes aux différentes branches qui se réu-

naissent, ne fassent qu'une seule et même ligne droite; et c'est ce qui constitue l'essence de la construction de toutes ces courbes, et nous porte à juger qu'elles ont été formées par un trait continu; puisque les côtés élémentaires des parties de courbes dont elles sont composées, sont essentiellement dans une seule et même direction par la nature de notre construction.

THÉORÈME.

81. *Si une droite* GAB *touche une circonférence* AF (*pl.* 3, *fig.* 34); *je dis que dans l'angle* CAB; *formé par le rayon* CA *et la tangente* AB, *on ne peut mener aucune ligne droite qui ne coupe la circonférence; mais qu'entre la même circonférence et sa tangente, on peut mener une infinité de circonférences qui n'ont qu'un seul point commun avec cette même circonférence.*

DÉMONSTRATION.

Soit 1°. une ligne droite AD menée dans l'angle droit CAB, formé par le rayon CA et la circonférence AF: je dis que cette ligne coupera nécessairement la même circonférence en quelque point F; car, si petit que soit l'angle BAD qu'elle fait avec la tangente, toujours est-il vrai que l'angle CAD est aigu; donc le rayon CA est oblique sur AD, et plus long que la perpendiculaire CD, abaissée du centre du cercle sur la ligne AF. Par conséquent il y aura encore une autre oblique CE de l'autre côté de CD à égale distance, et qui sera égale à CA; d'où il suit que le point F de la ligne AD sera dans la circonfé-

rence; et de plus toutes les lignes menées du centre C à la partie ADF seront plus grandes que CD, et plus courtes que CA ou CF; et celles menées à des points plus éloignés que les mêmes points A, F seront plus longues que les mêmes rayons CA et CF; donc la ligne AD coupe le cercle, si petit que soit l'angle BAD qu'elle fait avec la tangente. C. Q. F. 1°. D.

2°. D'un point O, pris sur le rayon CA prolongé, soit décrite une circonférence qui passe par le point A; cette nouvelle circonférence aura encore pour tangente la même ligne GAB: or, je dis que cette circonférence n'a que le seul point A commun avec la premiere; car, en tirant du centre C du premier cercle des lignes CE, CL si près que l'on voudra du point A; comme ces lignes sont menées du point C, qui n'est pas le centre du nouveau cercle, à la partie de cette circonférence qui en est la plus proche, elles seront toutes plus longues que CA (n°. 71); donc toute la portion EAL est extérieure au premier cercle, et n'a que le seul point A de contact commun avec sa circonférence; et enfin parceque l'on peut prendre une infinité de points comme O sur le rayon CA prolongé, et décrire de nouvelles circonférences extérieures les unes des autres, il s'ensuit que dans l'angle formé par la circonférence d'un cercle avec sa tangente, on peut mener une infinité de circonférences qui subdiviseront cet angle à l'infini, et n'auront que ce seul point de commun avec le premier cercle. C. Q. F. 2°. D.

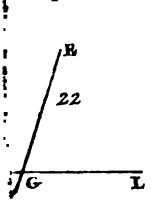


Fig. 23

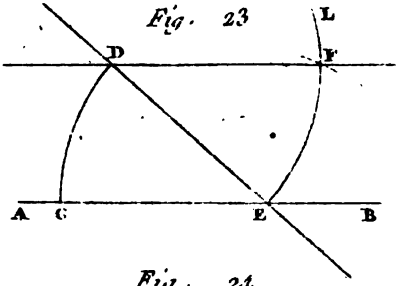
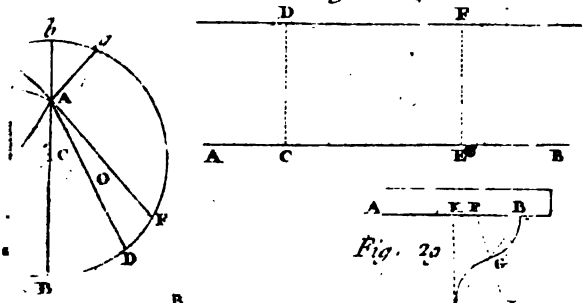


Fig. 24



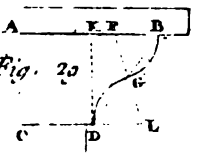


Fig. 29

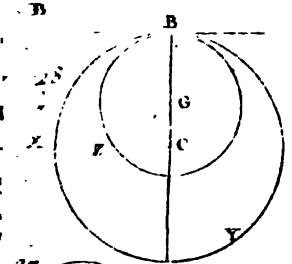


Fig. 30.

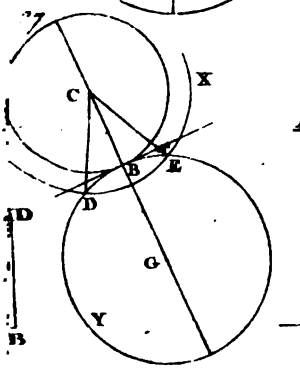
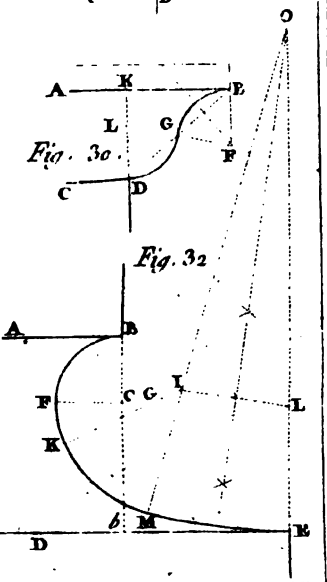


Fig. 32



SCHOLIE.

82. Les philosophes anciens et modernes, ainsi que les physiciens géometres, ont regardé de tout temps ce théorême comme une démonstration rigoureuse et géométrique de la divisibilité de l'espace à l'infini ; et cette proposition est une espece de paradoxe où le témoignage des sens nous meneroit bientôt à l'erreur, si l'on n'étoit guidé par une suite de démonstrations à l'abri de toute chicane. Les plus célebres géometres ont cru l'examen de la nature de l'angle dont on vient de parler, digne de leurs recherches ; et c'est peut-être là le premier pas qui ait été fait vers la géométrie de l'infini.

CHAPITRE VII.

De la mesure des angles qui n'ont pas leur sommet au centre ; solution de divers problémes qui en dépendent ; de la maniere de tracer sans compas des circonférences de cercle dont les rayons seroient d'une longueur démesurée, et dont on ne pourroit trouver le centre.

THÉORÊME I.

83. *De trois conditions que peut avoir une droite* DE, *à l'égard d'une corde* AB (*fig.* 35), *savoir de passer par le centre du cercle, d'être*

perpendiculaire à la corde, et de la diviser en deux parties égales; si deux ont lieu, la troisième aura aussi lieu nécessairement.

DÉMONSTRATION.

1°. Supposons d'abord que la droite DE passe par le centre et par le milieu de la corde; il est visible qu'elle lui est perpendiculaire, puisqu'elle a deux points à égales distances des extrémités de cette corde (n°. 40).

2°. Supposons qu'elle passe par le centre, et qu'elle soit perpendiculaire; je dis qu'elle la divise en deux parties égales: car puisqu'elle passe par le centre, elle a déja un point à distances égales de ses extrémités; et parcequ'elle est perpendiculaire, elle doit passer par tous les points à égales distances des mêmes extrémités (n°. 39); donc elle passe par le milieu de la corde.

3°. Enfin, supposons qu'elle passe par le milieu de la corde, et lui soit perpendiculaire; il est évident qu'elle doit passer par le centre, puisqu'elle a déja un de ses points à égales distances des extrémités, et qu'étant perpendiculaire au milieu, elle doit les avoir tous: or, le centre est à égales distances des extrémités de la corde qui sont dans la circonférence; donc elle passe par le centre. C. Q. F. 3°. D.

COROLLAIRE I.

84. Il suit de ce théorême que dans chacun des trois cas qui y sont énoncés, la ligne DE passera par le milieu des arcs ADB et AEB, soutenus par la corde; puisque, par la nature du

cercle, le milieu d'un arc quelconque est à égales distances de ses extrémités.

THÉORÈME II.

85. *Deux arcs de cercle compris entre deux parallèles seront toujours égaux, soit que ces parallèles soient deux cordes* AB, MN (*fig.* 36), *soit que l'une des deux soit une corde, et l'autre une tangente; et enfin lorsque ces deux parallèles seront deux tangentes, comme* EF, DG.

DÉMONSTRATION.

Car ayant abaissé du centre C la perpendiculaire CE sur l'une des deux cordes AB, elle sera aussi perpendiculaire sur sa parallèle MN; et par conséquent, par le présent théorême, cette ligne divisera les cordes et les arcs en deux parties égales, ce qui donne AE = BE, et EM = EN; retranchant de part et d'autre ces quantités égales, on aura AM = BN.

Dans le second cas, menant le rayon CE au point où la tangente touche le cercle; ce rayon sera perpendiculaire à la tangente, et par conséquent à la corde MN qui lui est parallèle; donc il divise encore la corde MN, et l'arc MEN en deux parties égales; donc ME = NE.

Dans le troisième cas où les arcs sont compris entre deux tangentes parallèles, soient menés du centre C aux points E, D, où ces tangentes touchent la circonférence, les rayons CE, CD qui seront perpendiculaires à chacune (n°. 55). Cela posé, ces rayons CD, CE, ayant un point commun, seront en ligne droite, ou feront entre eux un

angle quelconque; dans ce dernier cas, les tangentes seroient perpendiculaires à deux lignes différentes; donc elles ne seroient pas paralleles, ce qui est contre la supposition. Il faut donc admettre que ces deux rayons ne font qu'une seule et même ligne droite qui est nécessairement un diametre; donc les arcs DAE, DBE seront encore égaux, puisque chacun est une demi-circonférence. C. Q. F. D.

THÉORÊME III.

86. *Un angle quelconque* BAD *qui a son sommet à un point quelconque au-dedans ou au-dehors du cercle, a pour mesure dans le premier cas la demi-somme des arcs* BD, *bd; et dans le second, la demi-différence des mêmes arcs, compris entre ses côtés prolongés s'il est nécessaire* (*fig.* 37 et 38).

DÉMONSTRATION.

Par le centre C du cercle, soient menées les lignes FC*f*, GC*g*, respectivement paralleles aux côtés AB, AD de l'angle BAD. Cela posé, les angles égaux FCG, *f*C*g*, puisqu'ils sont opposés au sommet, sont aussi égaux à l'angle BAD; et parcequ'ils ont leur sommet au centre, ils ont pour mesure les arcs FG, *fg*, compris entre leurs côtés; donc ces mêmes arcs seront aussi la mesure de l'angle BAD; reste donc à en trouver la valeur au moyen des arcs BD, *bd*, déterminés par les côtés de ce même angle BAD, prolongés s'il est nécessaire. Or, il est visible que FG = BD — BF — DG dans l'une et dans l'autre *figure*, que $fg = bd + bf + dg$ (*fig.* 37), et que, dans la

figure 38, $fg = bf + dg - bd$; donc en ajoutant ces égalités, à cause que $FG = fg$, on aura $2FG = BD - BF - DG + bf + dg \pm bd$. Mais les arcs BF et *bf*, DG et *dg*, étant égaux (n°. 85), et affectés de signes contraires, se détruisent; on a donc $2FG = BD \pm bd$, et partant $FG = \frac{BD \pm bd}{2}$; *donc tout angle au-dedans du cercle a pour mesure la demi-somme; et tout angle au-dehors, la demi-différence des arcs compris entre ses côtés.* C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

87. Donc si un angle BAD (*fig.* 39) a son sommet dans la circonférence même du cercle, il aura pour mesure la moitié de l'arc BD, compris entre ses côtés. Car, dans ce cas, l'arc *bd* devient nul, et la formule $FG = \frac{BD \pm bd}{2}$ se réduit à $FG = \frac{BD}{2}$.

COROLLAIRE II.

88. Donc si plusieurs angles BAD, BFD, BGD (*fig.* 39), ont leur sommet dans une même circonférence, et sont appuyés sur un même arc, ils seront tous égaux, puisqu'ils ont tous pour mesure la moitié du même arc sur lequel ils sont appuyés. De plus, comme le remarque M. *Clairaut* dans sa Géométrie, si l'un des côtés BF ou GD de l'un de ces angles venoit à être infiniment petit, l'angle n'en seroit pas moins toujours le même et égal à l'angle BAD, puisque la grandeur de l'angle ne dépend pas de la longueur de ses côtés. Dans ce cas, l'un des côtés se confond

avec l'arc dont il est la corde, ou, ce qui revient au même, avec la tangente en ce point, si on le prolonge indéfiniment : donc un angle formé par une tangente et par une corde a pour mesure la moitié de l'arc soutenu par la corde. Ce que nous démontrerons bientôt d'une autre maniere.

COROLLAIRE III.

89. Donc si deux angles BAD et BED (*fig.* 39) occupent à eux deux une circonférence entiere, ils seront suppléments l'un de l'autre.

COROLLAIRE IV.

90. Donc un angle BAD, BAd ou BA*d est droit*, *obtus* ou *aigu*, *lorsqu'ayant son sommet dans une même circonférence* (*fig.* 40), *il est appuyé sur un arc égal à la demi-circonférence, ou sur un arc plus grand ou plus petit que la même demi-circonférence.*

COROLLAIRE V.

91. Donc un angle BAD ou *b*AD formé par une tangente et par une corde (*fig.* 41) a pour mesure la moitié de l'arc AD ou AFD compris entre ses côtés. En effet, puisque la ligne AD est une corde, elle est nécessairement oblique sur la tangente BA*b*, avec laquelle elle forme deux angles inégaux qui, pris ensemble, valent deux droits. Menant donc par le centre C et le point A de contact, le diametre ACF; les angles BAF, *b*AF seront droits chacun; et l'on aura BAD = BAF — DAF, et *b*AD = *b*AF + DAF : donc, puisque tous ces angles ont leur sommet dans la

circonférence, et ont pour mesure la moitié des arcs compris entre leurs côtés, on aura pour la mesure de l'angle BAD, $\frac{1}{2}$ADF — $\frac{1}{2}$DF = $\frac{1}{2}$AD, et pour celle de l'angle *b*AD, on aura $\frac{1}{2}$ ALF + $\frac{1}{2}$DF = $\frac{1}{2}$ALD; c'est-à-dire que *tout angle formé par une tangente et par une corde, aigu ou obtus, a toujours pour mesure la moitié de l'arc compris entre la corde et la tangente qui en sont les côtés.*

Corollaire VI.

92. Donc, si plusieurs circonférences de cercle (*fig.* 34) ont une même droite AB pour tangente commune au même point A, où elles se touchent toutes, et sont coupées par une même droite AF; tous les arcs coupés par cette même ligne sur chaque circonférence seront d'un même nombre de degrés, puisque les moitiés de ces mêmes arcs sont toutes mesure du même angle BAF, si petit ou si grand qu'il soit.

Corollaire VII.

93. Pareillement si un angle BAD (*fig.* 42) est formé par une corde AD et par une droite AB qui, prolongée, coupe le cercle; il aura pour mesure la moitié de l'arc *b*AD, compris entre ses côtés; ou (ce qui revient au même), la moitié de l'arc soutenu par la corde AD, plus la moitié de l'arc soutenu par le côté AB prolongé: car les angles BAD, *b*AD étant de suite, pris ensemble, valent deux droits, et doivent avoir à eux deux, pour mesure, une demi-circonférence. Donc, puisque *b*AD a nécessairement pour mesure la moitié de l'arc *b*D, l'autre BAD doit avoir pour

mesure la moitié de l'arc DA*b*, qui est aussi l'arc compris entre ses côtés : en sorte que la proposition *qu'un angle qui a son sommet à la circonférence a, dans tous les cas, pour mesure, la moitié de l'arc compris entre ses côtés, ne peut souffrir aucune exception.*

COROLLAIRE VIII.

94. Donc, si plusieurs angles ont leur sommet dans une même circonférence, et sont tous égaux; ils sont tous appuyés sur un même arc, ou au moins sur des arcs égaux.

SCHOLIE.

95. Nous avons vu que tout angle qui a son sommet au centre, a essentiellement pour mesure l'arc entier compris entre ses côtés. Il est bon d'observer que le réciproque peut fort bien n'avoir pas lieu, et que de plus il y a une infinité d'angles qui ont pour mesure l'arc entier compris entre leurs côtés, sans avoir leur sommet au centre. En effet, sur une circonférence décrite d'un rayon à volonté (*fig.* 43), prenons un arc quelconque BD; par ses deux extrémités B, D, et le centre C, faisons passer une circonférence de cercle; et d'un point A quelconque de l'arc BCD, menons deux lignes AB, AD, aux extrémités du premier arc. Les angles BAD, BCD sont égaux, si on les considere dans la circonférence du cercle qui passe par les trois points B, C, D, puisqu'ils ont chacun pour mesure la moitié du même arc B*a*D sur lequel ils sont appuyés : donc ils sont aussi égaux, si on

les considere dans le premier cercle. Mais l'angle BCD a pour mesure l'arc BD compris entre ses côtés, ayant son sommet au centre ; donc l'angle BAD a aussi pour mesure le même arc BD compris entre ses côtés ; quoiqu'il n'ait pas son sommet au centre. Il faut entendre la même chose de tout angle qui aura son sommet dans l'arc BACD. On voit donc que l'arc BACD est le lieu de tous les angles qui ont pour mesure l'arc entier compris entre leurs côtés, sans avoir leur sommet au centre ; si l'on en excepte l'angle BCD. De plus, si l'on prolonge les côtés AB, AD de l'angle BAD en *b* et en *d*, et si l'on tire les cordes ponctuées B*d*, D*b* ; il est visible que ces cordes seront toujours paralleles, quelque part où l'on prenne le sommet A dans l'arc BACD ; d'où il suit que les arcs BD et *bd* sont égaux : ainsi leur demi-sommet est égal à l'un d'eux. Passons à la solution de quelques problêmes qui dépendent des principes que nous venons d'exposer.

Problême I.

96. *Par un point* B, *donné sur une ligne* FD, *élever une perpendiculaire à cette ligne* (*fig.* 44).

Solution.

D'un point quelconque C pris sur le même plan que la droite AB avec le rayon CB, on coupera la ligne donnée FD en A, et on tracera un arc indéfini dans l'alignement des points déja donnés A et C ; puis on menera la droite AC, qui fasse section au point déterminé G, par lequel et par le point B on fera passer la droite GB qui sera

la perpendiculaire demandée, puisque l'angle ABG a son sommet à la circonférence, et qu'il est appuyé sur le diamètre C. Q. F. T. et D.

PROBLÈME II.

97. *D'un point G donné hors d'une droite aussi donnée* FD, *mener sur cette ligne une perpendiculaire* GB (*fig.* 44).

SOLUTION.

Du point donné G, tirez à la droite FD une oblique quelconque GA; de son milieu C avec le rayon CA ou CG, décrivez un arc de cercle qui coupe la ligne FD en B, auquel vous tirerez la droite GB qui sera la perpendiculaire demandée. Car, décrivant le demi-cercle entier sur le diamètre ACG, on voit que l'angle ABG est droit, puisqu'il est appuyé sur le diamètre (n°. 90). D'ailleurs, la ligne GB passe par le point donné G : donc elle est la perpendiculaire demandée. C. Q. F. T. et D.

PROBLÈME III.

98. *Un cercle et un point quelconque* A, *au-dehors du cercle, étant donnés sur le même plan; mener par ce point des lignes qui soient tangentes à la circonférence de ce même cercle* (*fig.* 45).

SOLUTION.

Supposons le problème résolu, et que les lignes AD et A*d* sont les tangentes demandées; si l'on tire les rayons CD, C*d*, les angles CDA, C*d*A seront droits (n°. 55). Donc ils doivent avoir

leur sommet dans la circonférence d'un cercle décrit sur AC, comme diametre. Ce qui donne la solution du problême, en tirant la ligne AC par le point donné A, et le centre C; puis décrivant sur cette ligne, comme diametre, une circonférence de cercle qui coupera celle du premier cercle aux points donnés D et *d*, qui seront les points demandés. C. Q. F. T. et D.

PROBLÊME IV.

99. *Sur une ligne donnée* BD, *construire une portion de cercle telle que tout angle qui aura son sommet dans cette circonférence, et qui sera appuyé sur l'arc soutenu par la corde* BD, *soit égal à un angle donné qrs* (*fig.* 46).

ANALYSE DU PROBLÊME.

Supposant le problême résolu; parmi tous les angles qui auront leur sommet dans la circonférence, et qui auront pour mesure la moitié de l'arc BD compris entre leurs côtés, je puis considérer en particulier celui qui seroit formé par cette même corde BD et par une tangente BF: donc l'angle DBF doit être égal à *qrs*. De plus, si je tire une droite indéfinie perpendiculaire à BF, cette ligne doit passer par le centre, puisque toute tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon. Mais le même centre doit aussi se trouver dans une ligne perpendiculaire au milieu de BD: donc il sera au point où ces lignes se couperont; ce qui fournit la construction suivante.

SOLUTION.

A l'une des extrémités de la ligne BD, faites un angle DBF, égal à l'angle donné. Au point B de la ligne BF, élevez-lui une perpendiculaire indéfinie; et sur le milieu de BD, élevez une autre perpendiculaire qui coupe la premiere en un point déterminé C, qui sera le centre du cercle demandé, que vous décrirez avec le rayon CB ou CD.

DÉMONSTRATION.

Soient tirées d'un point A quelconque de la circonférence des lignes AB, AD aux extrémités de la ligne donnée BD. L'angle BAD aura pour mesure la moitié de l'arc soutenu par la corde BD; mais l'angle DBF étant formé par une tangente et par une corde, a aussi pour mesure la moitié du même arc (n°. 91) (par construction); et l'on a fait cet angle égal à *qrs*; donc aussi BAD et tout autre construit de la même maniere sera égal à *qrs*. C. Q. F. T et D.

N. B. *Quelquefois on énonce le problême que nous venons de résoudre* comme il suit : *Sur une ligne donnée, construire une portion de cercle capable d'un angle donné.* On peut le résoudre très simplement au moyen de la ligne des cordes du compas de proportion, sur-tout si le nombre des degrés de l'angle *qrs* est donné.

SCHOLIE.

100. On fait un grand usage du dernier problême dans la pratique, pour déterminer la position

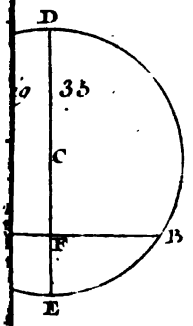


fig 35

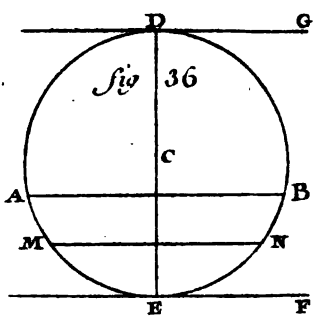
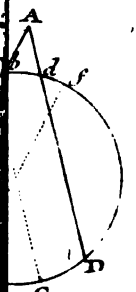


fig 36



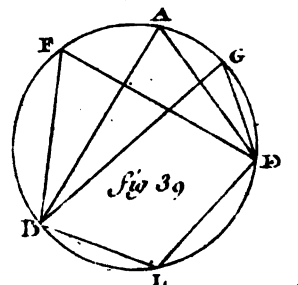


fig 39

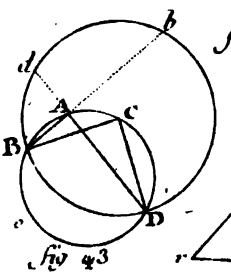


fig 43

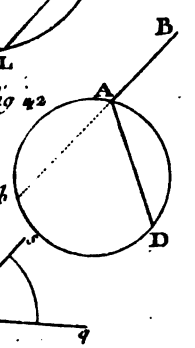
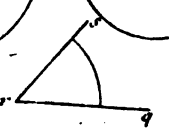


fig 42



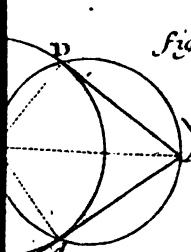
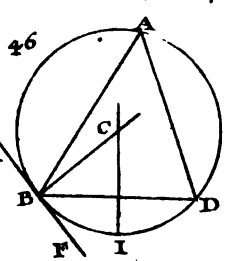


fig 46



tion de points importants sur le terrain, au moyen de trois points dont la situation respective est déja donnée. On s'en sert particulièrement dans les cartes marines pour relever la position de points qu'il est essentiel de marquer sur la carte. Supposons, par exemple, qu'on veuille y placer un écueil D, contre lequel un vaisseau pourroit se briser en arrivant sur une côte déja bien connue. De ce point à trois objets remarquables, comme A, B, C, on dirigera les rayons visuels DA, DB, DC; et l'on observera avec un instrument la valeur des angles ADB, BDC, dont on connoîtra le nombre des degrés et minutes. Il est visible que, si sur les lignes AB et BC on décrit des portions de cercles capables des angles observés ADB et BDC, le point demandé se trouvera dans le point où ces circonférences se couperont sur la carte.

Nous verrons par la suite comment on peut résoudre ce problême numériquement, par les opérations trigonométriques. Donnons, en attendant, la maniere de le résoudre par le compas de proportion. A la vérité, nous n'avons pas encore expliqué les principes de la construction de la ligne des cordes sur cet instrument; mais cela n'empêche pas qu'on ne puisse pratiquer la méthode que nous allons donner.

Supposons donc que du point D on ait observé les lignes AB et BC sous des angles respectivement égaux à 66° 0′, et à 44° 30′: on prendra avec le compas la longueur de la ligne AB, que l'on portera sur la ligne des cordes du compas de proportion, ouvert de maniere que la

distance de 132° à 132°, double du premier angle observé, soit égale à cette même ligne AB. Puis on prendra sur le même compas de proportion la distance de 60° en 60, et avec cette ouverture des points A, B, comme centres, on décrira deux arcs de cercle qui se couperont quelque part en un point O, qui sera le centre d'une première circonférence sur laquelle doit se trouver le point D. Pareillement ayant ouvert le compas d'une grandeur égale à BC, on portera cette grandeur sur le compas de proportion, en sorte que les points de 89° à 89° soient éloignés sur la ligne des cordes d'une quantité égale à cette ligne. Prenant ensuite la distance de 60 à 60 sur la même ligne des cordes, on décrira des points B et C comme centres : avec cette ouverture de compas, deux arcs de cercle qui se couperont en un point *o*, qui sera le centre d'une nouvelle circonférence, sur laquelle doit encore se trouver le point D. Ainsi, le point où ces deux circonférences se couperont, sera le point demandé ; car la ligne BD ayant été prise égale à une corde 132°, l'arc soutenu par cette corde sera de 132°. Pareillement la ligne BC ayant été faite égale à la corde 89°, l'arc soutenu par cette même corde sera du même nombre de degrés. Donc, puisque les angles ADB, BDC ont leur sommet dans les circonférences des cercles auxquels ils appartiennent, ils auront la moitié de ces arcs pour mesure. Donc, du point D, on verra la ligne AB sous un angle de 66° 0′, et la ligne BC sous un angle de 44° 30′ : donc le point D, ainsi déterminé sur la carte, exprime le point D sur le lieu

dont cette carte représente l'ensemble.

SECOND SCHOLIE.

101. On se sert avec beaucoup d'avantage des angles invariables pour décrire une portion de cercle par un mouvement continu lorsqu'on ne peut en avoir le centre. En effet, puisque tous les angles qui ont leur sommet dans une même circonférence, et sont appuyés sur un même arc, sont égaux; réciproquement si plusieurs angles sont appuyés sur un même arc et sont égaux, leur sommet est dans la circonférence d'un même cercle; ou, ce qui revient au même, on peut regarder ces différents angles comme un même angle BAD, dont les côtés glissent entre deux points fixes F et G (*fig.* 48), et dont le sommet A décrit une circonférence de cercle. Plus l'angle BAD sera grand, plus l'arc FAG sera d'un petit nombre de degrés; mais aussi plus le rayon du cercle sera grand; en sorte que, si l'on avoit à décrire un arc dont le rayon eût 50 à 60 pieds, on ne peut le décrire que par ce moyen, sur-tout si l'espace sur lequel il doit être tracé, est très peu étendu. De plus, si entre les mêmes points F et G, on fait mouvoir un autre angle *bad*, supplément de BAD, on pourra achever la circonférence entiere du cercle par le mouvement de ces deux angles invariables entre les points fixes F et G. Les géographes, dans leurs projections, représentent sur la mappemonde les cercles méridiens par des portions de circonférences, dont les rayons sont d'autant plus grands, que ces méridiens sont plus près de celui qui est pris pour

premier méridien, et qui est exprimé par une ligne droite. On voit donc combien il leur importe de tracer les arcs de cercle, sans en chercher le centre; et c'est par un instrument fondé sur les principes que nous venons d'exposer, qu'ils exécutent cette opération.

LIVRE SECOND.

Des Éléments de Géométrie.

DES SURFACES.

1°. *Des principales especes de figures planes et rectilignes; des propriétés qui leur sont communes.* 2°. *De la maniere de mesurer toutes les surfaces rectilignes.* 3°. *De la transformation et réduction des figures les unes dans les autres; des opérations de l'arithmétique sur les figures planes.* 4°. *Des polygones réguliers en général, et de la maniere de les quarrer; application de cette méthode à la surface du cercle et de ses différentes parties.* 5°. *Des lignes proportionnelles; des triangles et des figures semblables.* 6°. *Des rectangles sur les différentes parties d'une ligne droite divisée en deux parties; des secantes intérieures ou extérieures au cercle, et des moyennes proportionnelles.* 7°. *Propriétés générales des triangles quelconques eu égard aux quarrés de leurs côtés, dont l'un est pris pour base.* 8°. *De la nature des polygones réguliers inscrits ou circonscrits au cercle; des lignes divisées en moyenne*

et extrême raison; propriétés singulieres des lignes ainsi divisées; usage de cette division pour décrire le pentagone et le décagone réguliers; théorie du calcul des cordes d'arcs soudivisés continuellement suivant la progression 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, *etc. application aux polygones primitifs et dérivés, d'où l'on tire la méthode des limites du rapport de la circonférence au diametre.* 9°. *Du rapport des surfaces de figures quelconques entre elles, et particulièrement des surfaces semblables; multiplication et division des figures semblables; de la maniere de retrancher des surfaces données de surfaces aussi données, par des lignes droites assujetties à passer par un point donné; détermination de la surface du triangle par la connoissance de ses côtés.* 10°. *Des figures isopérimetres.*

CHAPITRE PREMIER.

Des figures planes en général et des propriétés qui leur sont communes; de l'égalité parfaite des triangles; du quadrilatere et de ses différentes especes; du rapport du nombre des côtés d'une figure quelconque avec la somme de ses angles, tant intérieurs qu'extérieurs.

DÉFINITIONS.

§. PREMIER.

102. NOUS avons déja dit qu'*une surface est une étendue qui a deux dimensions, connues sous le nom de* longueur *et* largeur, *et qu'il faut tou-*

jours connoître pour déterminer son rapport avec une autre surface prise pour mesure ou pour unité. On distingue des *surfaces planes* et des *surfaces courbes.* Les premieres sont celles auxquelles on peut appliquer une regle bien dressée dans toutes sortes de directions ; ou, ce qui revient au même, celles qui peuvent être décrites sur un plan. Les surfaces courbes sont celles auxquelles on ne peut appliquer une regle que dans un nombre déterminé de directions, ou quelquefois dans aucune, comme la surface d'une boule.

Nous n'examinerons dans ce livre que les surfaces terminées par des lignes droites, ou par la circonférence du cercle ; ou celles qui seroient terminées par des lignes droites, et des courbes qui peuvent se ramener à des arcs de cercle. On distingue les surfaces planes par le nombre de leurs côtés et de leurs angles, et aussi par les relations que ces lignes peuvent avoir entre elles ainsi que ces mêmes angles.

103. Une figure ne peut être terminée de toutes parts qu'elle n'ait au moins trois côtés. On l'appelle *triangle* ou *trilatere.* C'est la premiere et la plus simple de toutes les surfaces planes et rectilignes. Celle qui a quatre côtés se nomme *quadrigone*, et plus communément *quadrilatere.* Celle qui a cinq angles ou cinq côtés se nomme *pentagone.* En général elle prend le nom d'*hexagone*, d'*heptagone*, d'*octogone*, d'*ennéagone*, de *décagone*, d'*endécagone*, de *dodécagone*, *etc.* suivant qu'elle est de *six*, *sept*, *huit*, *neuf*, *dix*, *onze*, ou *douze côtés*, *etc.* Lorsqu'on veut désigner une figure à plusieurs angles ou à

plusieurs côtés, sans spécifier le nombre absolu de ces angles ou de ces côtés, on la nomme *polygone* ou *multilatere*. On distingue encore plusieurs especes de polygones; des *polygones irréguliers*, des *polygones symmétriques;* et enfin des *polygones réguliers*. Les premiers *sont ceux dont les angles et les côtés ne sont assujettis à aucune loi déterminée*. Les seconds *sont ceux qui peuvent être divisés en parties semblables par une ou plusieurs lignes droites*. Enfin les derniers *sont ceux dont tous les angles et dont tous les côtés sont égaux*. Les courbes symmétriques peuvent être regardées comme des polygones symmétriques d'un nombre infini de côtés; le cercle est la limite de tous les polygones réguliers. Le triangle étant la plus simple de toutes les figures, l'ordre demande que nous commencions par lui l'examen des figures terminées par des lignes droites.

§. II.

Des propriétés du triangle.

104. Nous avons déja vu qu'il faut au moins trois lignes droites pour enfermer un espace de tous côtés, et que la figure qui en résulte se nomme *triangle*.

105. Outre les trois angles et les trois côtés, renfermés essentiellement dans l'idée du triangle, on y distingue encore trois autres parties; *une base*, *un sommet* et *une hauteur*. *La base* d'un triangle (*fig.* 49) *est la ligne comme* BC *sur laquelle on imagine qu'il est appuyé. Le sommet est l'angle opposé à la ligne qu'on regarde comme sa*

base. Enfin *la hauteur est une perpendiculaire abaissée du sommet sur la base,* comme la ligne AD. Que la perpendiculaire tombe au-dedans ou au-dehors d'un triangle, elle n'en mesure pas moins la hauteur. Cela dépend seulement de la valeur des angles opposés à celui que l'on prend pour sommet.

106. On distingue le triangle ou par rapport à ses côtés ou par rapport à ses angles. Sous ces deux rapports différents on en trouve également trois especes. Celui, comme X (*fig.* 50), dont les trois côtés sont égaux, se nomme *équilatéral.* Celui, comme Y, dont les deux côtés sont égaux se nomme *isoscele.* Enfin celui dont les trois côtés sont inégaux, comme Z, se nomme *scalene.* (Ces deux dernieres dénominations sont dérivées du grec; de ἴσος, qui signifie *égal,* et de σκέλος, *jambe* (qui a des jambes égales); et de σκαλινος, *boiteux*). La dénomination du triangle à l'égard de ses angles se prend du plus grand de ces mêmes angles. Si le plus grand est droit, le triangle se nomme *rectangle* ou *orthogone;* si ce plus grand angle est obtus, il se nomme *obtus-angle* ou *amblygone;* enfin il prend le nom d'*acutangle* ou d'*oxygone,* lorsque le plus grand de ses angles est un angle aigu.

THÉORÊME I.

107. *La somme des trois angles d'un triangle quelconque* BAC *vaut toujours deux angles droits* (*fig.* 52).

DÉMONSTRATION.

Par le problême du (n°. 58) soit inscrit le triangle BAC dans une circonférence de cercle. Cela posé, chaque angle ayant son sommet dans cette même circonférence, aura pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés (n°. 86); donc puisque ces trois arcs occupent ensemble la circonférence entiere, les moitiés de chacun, ou les mesures réunies des trois angles du triangle, feront une somme de 180°. C. Q. F. D.

Cette vérité peut encore se déduire de ce qui a été démontré sur les paralleles; car soient deux lignes paralleles AB, CD (*fig.* 53), coupées par une droite quelconque indéfinie AF. On a vu (n°65) que les angles internes BAC, DCA, pris ensemble, valent deux droits; ce qui ne peut manquer d'avoir lieu tant que CD restera parallele à AB. Mais [illegible]te ligne vient à s'incliner vers la derniere [illegible]ormer un triangle ABC, on voit que si l'angle interne ACD est diminué d'un angle quelconque DCB, dans le même instant il se forme au point B un angle ABC égal à DCB, puisqu'ils sont alternes internes. On voit aussi que les trois angles ACB, BCD, DCF autour du point C, valent deux droits (n°. 24): mais l'angle BCA est déja un des angles du triangle. 2°. L'angle DCF est égal à BAC par la nature des paralleles. Enfin DCB est égal à ABC, puisqu'ils sont alternes internes. Donc il est de toute évidence que les trois angles d'un triangle quelconque valent deux droits.

COROLLAIRE I.

108. Donc les trois angles d'un triangle quelconque sont toujours égaux en somme à ceux d'un autre triangle.

COROLLAIRE II.

109. Donc si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, chacun à chacun; le troisieme de l'un sera aussi égal au troisieme de l'autre.

COROLLAIRE III.

110. Donc s'il y a un angle droit dans un triangle, les deux autres angles sont compléments l'un de l'autre; et réciproquement. On voit de plus qu'il ne peut y avoir qu'un seul angle droit dans un triangle, et à plus forte raison qu'un seul angle obtus.

COROLLAIRE IV.

111. Donc si l'on prolonge un côté quelconque, comme AC, d'un triangle BAC (*fig.* 53), l'angle extérieur BCF vaudra à lui seul les deux autres angles BAC et ABC; car ces deux angles, avec l'angle ACB, font, comme l'angle BCF avec le même angle, la même somme de 180°, par le théorême présent. *Donc l'angle extérieur est plus grand qu'aucun des deux intérieurs opposés;* et dans un triangle isoscele, *si l'on prolonge l'un des côtés égaux, l'angle extérieur sera double de l'angle opposé à l'un de ces mêmes côtés.*

SCHOLIE.

112. Si l'on observe les trois angles d'un triangle formé par des lignes droites ou rayons de trois objets visibles de chacun des deux autres; quel que soit le degré de précision avec lequel se fassent les observations, il n'arrive presque jamais que la somme des trois angles forme deux droits: non que l'on puisse élever le moindre doute sur la vérité de ce théorême fondamental; mais parceque l'instrument, comme l'œil de l'observateur, ne peut fixer chaque angle à une minute près, si l'instrument donne les minutes. Mais si la somme des trois angles s'écartoit trop de 180° avec un graphometre qui donneroit les minutes de 5 en 5, comme s'il y avoit une erreur de 8 à 10 minutes tant en plus qu'en moins, c'est un signe certain que l'on a commis quelque erreur dans l'observation des angles ou au moins de quelques uns; et si on les trouvoit toujours les mêmes après les avoir vérifiés, c'est une marque certaine que l'instrument seroit vicieux, parcequ'il seroit mal divisé, ou mal centré. C'est même un des moyens dont on se sert pour vérifier un instrument, comme lorsqu'en faisant un tour d'horizon avec un graphometre, et observant la somme des angles autour d'un point, si la somme des angles observés est au-dessus ou au-dessous de 360° d'une quantité assez considérable, comme de 12 à 15 minutes; on en tirera les mêmes conséquences sur l'exactitude de l'observation des angles ou la bonté de l'instrument. Communément les erreurs sont beaucoup moins considérables à cause des compensations qui ont lieu dans l'estime de leurs mesures.

THÉORÊME II.

113. *Dans un triangle quelconque* BAC (*fig.* 52), *le plus grand côté est opposé au plus grand angle, le plus petit côté au plus petit angle, et le moyen côté au moyen angle; et réciproquement, le plus grand angle est opposé au*

plus grand côté, le plus petit angle au plus petit côté, et le moyen angle au moyen côté.

DÉMONSTRATION.

Ayant fait passer une circonférence par les trois angles du triangle, si l'on suppose le côté BC plus grand qu'aucun des côtés AB et AC; ce côté étant la corde de l'arc BGC sur lequel l'angle BAC est appuyé, il faut que ce même arc soit plus grand qu'aucun des arcs ALB, AEC; donc la moitié de cet arc sera aussi plus grande que la moitié des arcs ALB, AEC. Mais cette moitié est la mesure de l'angle BAC opposé au côté BC: donc le plus grand côté est opposé au plus grand angle, le plus petit côté au plus petit angle; et le moyen côté au moyen angle. C. Q. F. D.

Réciproquement, si l'angle BAC est supposé plus grand qu'aucun des deux autres angles ABC, ACB; supposant toujours un cercle circonscrit au triangle; l'arc BGC, sur lequel cet angle est appuyé, sera aussi plus grand qu'aucun des arcs ALB, AEC, puisque sa moitié, mesure du plus grand angle BAC, est plus grande que la moitié de chacun des autres arcs, mesures des angles qui leur sont opposés; donc puisque dans un même cercle un plus grand arc est soutenu par une plus grande corde, un plus petit arc par une plus petite corde, la corde BC sera plus grande qu'aucune des cordes AB et AC. Mais cette corde est aussi le côté opposé au plus grand angle; la corde AC est le côté opposé au plus petit angle, et AB le côté opposé au moyen angle; donc *dans un triangle quelconque, le plus grand angle est*

opposé au plus grand côté, le plus petit angle au plus petit côté, et le moyen angle au moyen côté. C. Q. F. 2°. D.

Corollaire.

114. Donc si les trois côtés d'un triangle sont égaux, les trois angles le seront aussi; et par conséquent, tout triangle équilatéral est aussi équiangle. S'il y a deux côtés égaux, il y aura aussi deux angles égaux; enfin si ses trois côtés sont inégaux, ses trois angles le seront aussi; et réciproquement *tout triangle dont les trois angles sont égaux est équilatéral; tout triangle qui a deux angles égaux est isoscele; et tout triangle dont les trois angles sont inégaux est scalene.*

On a souvent besoin de mesurer la hauteur d'un triangle et de le faire avec le plus de précision. Nous allons donner dans le problême suivant la maniere d'assigner les trois perpendiculaires abaissées d'un angle quelconque d'un triangle sur chacun des trois côtés.

Problême I.

115. *Étant donnés les trois côtés d'un triangle quelconque* BAC, *abaisser de chaque angle une perpendiculaire sur le côté opposé, par une seule opération.* (*fig.* 52).

Solution.

Sur l'un des côtés BC du triangle, comme diametre, décrivez une demi-circonférence qui coupe les côtés AC, AB aux points P, Q, auxquels vous tirerez les droites BP et CQ qui seront les

perpendiculaires aux mêmes côtés abaissées des angles opposés B et C. Enfin par le point O, où se coupent ces deux droites et le point A, vous menerez la droite AOR qui sera la troisieme perpendiculaire. La solution est évidente quant aux deux premieres lignes. Les commencants pourront s'exercer à prouver que la troisieme est aussi perpendiculaire sur BC: observons seulement qu'il suit de notre solution que *les perpendiculaires abaissées des trois angles d'un triangle sur chacun des trois côtés, se coupent dans un seul et même point.*

§. III.

De l'égalité parfaite des triangles.

LEMME.

116. *Si deux angles inégaux* BCA *et* BCD (*fig.* 54) *se trouvent compris entre côtés égaux, le plus grand angle sera opposé à un plus grand côté, et le plus petit à un plus petit côté.*

DÉMONSTRATION.

Du sommet C commun aux deux angles inégaux, qui ont le côté commun CB avec les côtés CA, CD égaux entre eux, soit décrite une circonférence de cercle avec le rayon CA; elle passera nécessairement par l'extrémité du côté CD, puisque par hypothese on a CA=CD. Chacun des angles BCA, BCD, ayant son sommet au centre, a pour mesure l'arc entier GA, GD, respectivement compris entre ses côtés; donc puisqu'on

a BCA plus grand que BCD, l'arc GA, mesure du premier, sera aussi plus grand que GD mesure du second; donc la ligne BA s'éloigne plus de celle BGC qui passe par le centre que la ligne BD; et ces lignes sont menées du point B qui n'est pas le centre du cercle, à la partie de la circonférence qui en est la plus proche; donc on aura BA plus grand que BD (n°. 71). Or, cette ligne est le côté opposé au plus grand des deux angles inégaux compris entre côtés égaux; d'où suit évidemment la vérité du théorême.

Le théorême se démontreroit de la même maniere si les angles inégaux BCA et BCD, compris entre côtés inégaux, se trouvoient tous deux *obtus*, d'où suit la vérité de notre proposition dans tous les cas.

THÉORÊME III.

117. *Deux triangles* BAC, *bac, sont parfaitement égaux lorsque les trois côtés de l'un sont égaux aux trois côtés de l'autre* (*fig.* 55).

DÉMONSTRATION.

Si les triangles proposés ne sont pas parfaitement égaux, il ne peut y avoir d'inégalité que de la part des angles: supposons donc que les gles A, *a*, ne soient pas égaux; comme d'ailleurs ces angles, par hypothese, se trouvent compris entre côtés égaux; le plus grand sera, par le lemme précédent, opposé à un plus grand côté BC, et le plus petit à un plus petit côté *bc*; donc les côtés du premier triangle ne seroient plus

égaux à ceux du second ; ce qui implique contradiction : donc on ne peut admettre d'inégalité dans les angles ; donc il faut nécessairement que les deux triangles soient égaux en tout, lorsque les trois côtés de l'un sont égaux aux trois côtés de l'autre, puisque l'égalité des côtés entraîne l'égalité des angles. C. Q. F. D.

THÉORÈME IV.

118. *Deux triangles* BAC, *bac, sont parfaitement égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux* (*même figure*).

DÉMONSTRATION.

Supposons que les angles A et *a* sont égaux, et que les côtés AB et AC du premier soient respectivement égaux aux côtes *ab*, *ac* du second : soit appliqué l'angle *a* du triangle *bac* sur l'angle A du triangle BAC, en sorte que le sommet de l'un soit sur le sommet de l'autre, et que le côté *ab* se confonde avec le côté AB ; le côté *ac* sera aussi couché sur le côté AC ; car on ne peut pas dans notre construction supposer que *ac* tombe au-dessus ou au-dessous de AC sans admettre que les angles A et *a*, qu'on supposoit égaux, ne le sont plus ; ce qui seroit contradictoire : donc encore, à cause des côtés égaux AB, *ab*; AC, *ac*, les points B, *b*, C, et *c*, seront confondus les uns avec les autres, c'est-à-dire que le troisieme côté du second triangle sera aussi égal au troisieme côté du premier ; donc les deux triangles se conviennent dans toutes les parties ; donc ils sont égaux en tout. C. Q. F. D.

THÉORÈME V.

THÉORÊME V.

119. *Deux triangles* BAC, *bac, sont parfaitement égaux, lorsqu'ils ont deux angles égaux* B, *b*; C, *c, sur des bases égales* BC, *bc.*

DÉMONSTRATION.

Appliquant le côté *bc* sur le côté BC, en sorte que le point *b* se confonde avec le point B; le point *c* tombera aussi sur le point C, puisque les côtés BC, *bc,* sont égaux. De plus, à cause de l'égalité respective des angles *b, c,* aux angles B et C; il faut encore que les côtés *ba*, *ca,* se confondent avec les côtés BA, CA; sans quoi les angles ne seroient pas égaux, comme on le suppose; ce qui seroit contradictoire : donc les deux triangles se conviennent parfaitement dans toutes leurs parties; donc ils sont égaux en tout, lorsqu'ils ont des angles égaux sur des bases égales. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

120. De ces trois caracteres d'égalité parfaite des triangles, on déduit trois manieres de construire un triangle égal à un triangle donné; 1°. en faisant les trois côtés de l'un égaux aux trois côtés de l'autre; 2°. en donnant au second un angle égal compris entre côtés égaux; 3°. en faisant en sorte qu'ils aient deux angles égaux, chacun à chacun, sur des bases égales.

Quoique ces trois moyens soient également rigoureux et géométriques; cependant, eu égard aux erreurs inévitables dans la mesure des angles,

la premiere méthode est celle qu'il faut toujours employer de préférence dans la pratique, lorsqu'on voudra faire un triangle égal en tout à un autre triangle; ou copier exactement une figure terminée par des lignes droites, après l'avoir réduite en triangles.

Remarquons de plus que le triangle est la seule de toutes les figures dont les côtés déterminent essentiellement les angles; en sorte que dans deux figures qui ont plus de trois côtés, tous ceux de l'une pourroient être égaux à ceux de l'autre, sans que les angles fussent égaux, et par conséquent sans que les figures fussent égales en tout.

Ces trois théorêmes méritent d'autant plus d'attention, qu'ils auront leurs analogues dans la théorie des triangles semblables, à laquelle on peut réduire toute la géométrie.

CHAPITRE II.

Des quadrilateres et de leurs différentes especes.

DÉFINITIONS.

121. TOUTE figure de quatre côtés se nomme *quadrilatere* ou *quadrigone*. 1°. Celle dont les quatre côtés sont inégaux ainsi que les angles, et qui n'a aucuns côtés paralleles, retient le nom de *quadrilatere;* on l'appelle aussi quelquefois *rhombe* (*fig.* 56). 2°. Un quadrilatere dont deux côtés sont paralleles, sans être égaux, se nomme *trapeze*. Tous les quadrilateres dont les côtés

sont paralleles, sont nommés *parallélogrammes* comme les *figures* 58, 59, 60 et 61. 4°. Lorsqu'un parallélogramme a ses angles inégaux, il retient le nom de *parallélogramme*, comme AB CD (*fig.* 58). 5°. Si ses mêmes côtés sont inégaux et ses quatre angles droits (*fig.* 59), il se nomme *parallélogramme rectangle* ou simplement *rectangle*. 6°. Si les quatre côtés sont égaux avec des angles inégaux (*fig.* 60), on l'appelle *losange* ou *rhomboïde*. 7°. Enfin, si les quatre côtés sont égaux, et si les quatre angles sont droits, la figure est un *quarré* (*fig.* 61), qui a toujours été regardé comme la surface la plus simple, et celle à laquelle on doit rapporter la valeur de toutes celles qu'on se propose de mesurer : de-là *quarrer* ou *mesurer* une surface quelconque sont des termes synonymes. 8°. Toute ligne menée d'un angle à son opposé dans un quadrilatere quelconque se nomme *diagonale*.

Corollaire I.

122. Il suit des définitions précédentes que la somme des angles d'un quadrilatere quelconque ne vaut jamais plus de quatre angles droits ; puisque chaque espece de quadrilatere sera toujours divisée par sa diagonale en deux triangles, dont les angles valent pour chacun 180°.

Corollaire II.

123. Donc si dans un quadrilatere, comme ABDF, il se trouve deux angles droits chacun en particulier ; les deux autres angles seront supplément l'un de l'autre ; et tous les quadrilateres de

cette espece, ainsi que tout parallélogramme rectangle, pourront toujours être inscrits dans un cercle, qui aura pour diametre la diagonale opposée aux angles droits.

THÉORÊME I.

124. *Si un quadrilatere* ABCD *a ses côtés opposés égaux deux à deux, ces mêmes côtés seront aussi paralleles deux à deux* (*fig.* 58).

DÉMONSTRATION.

Soit tirée la diagonale AC; les triangles ABC et CDA seront égaux en tout, puisque les trois côtés de l'un sont égaux aux trois côtés de l'autre, à cause que AC est commun, et que par hypothese on a AB=CD et BC=AD. Donc (n°. 117), ils sont égaux en tout, et les angles opposés aux côtés égaux, comme ACB et CAD, sont égaux. Mais ces mêmes angles sont aussi alternes internes; donc CD et AB sont des lignes paralleles. De même les angles ACD et CAB sont égaux, puisqu'ils sont opposés à des côtés égaux; et de plus ces mêmes angles sont alternes internes; donc les lignes AD et CB sont paralleles. Donc si un quadrilatere a ses côtés opposés égaux deux à deux, ces mêmes côtés sont aussi paralleles deux à deux. C. Q. F. D.

THÉORÊME II.

125. *Si un quadrilatere a deux de ses côtés égaux et paralleles, les deux autres côtés seront aussi égaux et paralleles.*

DÉMONSTRATION.

Au quadrilatere ABCD (*fig.* 58), dont les côtés AB, CD opposés sont supposés égaux et paralleles, soit menée la diagonale AC; les triangles BAC et DCA seront égaux en tout, puisque les angles BAC et DCA, égaux à cause qu'ils sont alternes internes, sont compris entre côtés égaux par construction; donc le troisieme côté BC du premier est égal au troisieme côté AD du second; et parceque les angles DAC et BCA égaux sont alternes internes, il s'ensuit que les deux côtés AD, BC sont aussi paralleles. Donc si un quadrilatere a deux côtés égaux et paralleles, les deux autres côtés seront aussi égaux et paralleles. C. Q. F. T.

THÉORÊME III.

126. *Si un quadrilatere* ABCD *a ses côtés opposés paralleles deux à deux, ces mêmes côtés seront aussi égaux deux à deux;* ou, ce qui revient au même, *tout parallélogramme a ses côtés opposés égaux deux à deux.*

DÉMONSTRATION.

Ayant encore tiré la diagonale AC, les deux triangles ABC et CDA seront toujours égaux en tout, puisqu'ils ont une base commune AC, et que les angles BAC et BCA du premier sur sa base AC sont égaux aux angles DCA et DAC du second sur la même base, comme alternes internes, entre les paralleles AB, CD; AD, BC,

qui les forment avec la diagonale AC. Donc tout parallélogramme a ses côtés opposés égaux deux à deux. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

127. Donc toute diagonale d'un parallélogramme le divise en deux triangles toujours égaux en tout; et par conséquent un triangle est moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur.

THÉORÈME IV.

128. *Deux parallélogrammes* ABCD, ABEF (*fig.* 64) *sont égaux en surface, lorsqu'ils ont même base et même hauteur.*

DÉMONSTRATION.

Les deux triangles ADF, BCE, sont égaux en tout; car le côté AD du premier est égal au côté BC du second, puisque ces lignes sont côtés opposés du même parallélogramme (n°. 126). De même le côté AF du premier égale le côté BE du second, par la même raison. Enfin à cause que l'on a DC=AB et la même ligne AB=EF, toujours par le même principe, il s'ensuit que DC =EF: ajoutant CF de part et d'autre, on aura DF=CE. Donc les deux triangles ADF, BCE, sont égaux en tout, puisque les trois côtés du premier sont égaux aux trois côtés du second; donc si l'on retranche de part et d'autre le triangle commun CGF, il restera le trapeze ADCG d'une part, égal au trapeze BEFG de l'autre: ajoutant à chacun le triangle AGB, il vient ABCD

= ABEF. Donc les parallélogrammes de même base et de même hauteur sont égaux. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

129. Donc si deux parallélogrammes ont même base et sont égaux, ils auront même hauteur; ou, ce qui revient au même, ils pourront être compris entre paralleles.

COROLLAIRE II.

130. Donc si deux parallélogrammes de même hauteur sont égaux, ils auront même base, ou au moins des bases égales; sans quoi la proposition qu'on vient de démontrer seroit fausse.

COROLLAIRE III.

131. Donc si deux parallélogrammes ont même base et sont inégaux, ils auront des hauteurs inégales; et s'ils ont même hauteur et sont inégaux, ils auront des bases inégales.

THÉORÈME V.

132. *Deux triangles* ADB, AFB, *sont égaux en surface lorsqu'ils ont même base* AB *et même hauteur; ou lorsqu'ayant même base, leurs sommets* D, F *sont dans une même droite parallele à leur base commune* (*fig.* 65).

DÉMONSTRATION.

Ayant prolongé indéfiniment la droite DF qui joint les sommets des deux triangles; soient menées par le point B les droites BC, BE respective-

ment paralleles aux droites AD, AF. Par cette construction, les figures ABCD, ABEF seront des parallélogrammes, égaux en surface par le théorême précédent, puisqu'ils ont même base et même hauteur; donc les triangles ADB, AFD, qui en sont les moitiés respectives (n°. 127), sont aussi égaux. *Donc deux triangles qui ont même base et même hauteur sont égaux en surface.*

COROLLAIRE I.

133. Donc les triangles qui ont même base et qui sont égaux, ont même hauteur; et s'ils ont même hauteur avec des surfaces égales, il faut qu'ils aient même base ou au moins des bases égales; et si des triangles inégaux ont des bases ou des hauteurs égales, il faut qu'ils aient des hauteurs ou des bases inégales.

COROLLAIRE II.

134. On voit donc que si l'on sait mesurer la surface d'un parallélogramme, on saura aussi mesurer celle d'un triangle, puisque *tout triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur.* On voit de plus, que toute figure terminée par des lignes droites peut se réduire en triangles, dont il sera facile d'avoir la surface. Ainsi le triangle est un élément fini, dans lequel on peut décomposer toute surface terminée par des lignes droites; et même celles qui sont terminées par des lignes courbes, en y admettant une infinité de triangles qui auroient le sommet au même point, et des bases infiniment

petites. Cette vérité peut servir à démontrer des propositions importantes sur la valeur des angles d'un polygone quelconque, eu égard au nombre de ses côtés. En effet, ayant vu que la somme des angles d'un triangle est toujours égale à deux droits; que celle des angles d'un quadrilatere quelconque vaut toujours quatre angles droits; on peut être curieux de connoître s'il n'y a pas une regle générale sur la valeur des angles d'un polygone, d'après le nombre de ses côtés. Occupons-nous de cette recherche, avant de donner les regles générales sur la mesure des surfaces.

PROBLÊME I.

135. *Trouver la valeur de la somme des angles intérieurs d'un polygone quelconque dont le nombre des côtés est donné* (*fig.* 63).

SOLUTION.

D'un point quelconque C pris au-dedans d'un polygone de tant de côtés que l'on voudra, comme ABDEFG, soient tirées à tous les angles de ce même polygone des lignes droites, telles que CA, CB, CD, CF, CG; la figure se trouvera partagée en autant de triangles qu'il y a de côtés; et puisque la somme des angles de chaque triangle fait deux droits, il faudra multiplier deux droits ou 180° par le nombre des côtés du polygone; et l'on aura la somme des angles de tous ces triangles. Mais il faut observer que tous les angles autour du point C valent quatre angles droits, et que ces mêmes angles ne sont nullement formés par les

côtés du polygone. Donc cette somme est à retrancher de celle trouvée ci-dessus pour la somme des angles de tous les triangles dans lesquels on a décomposé le polygone; d'où suit cette regle ou théorême général: *La somme des angles intérieurs d'un polygone quelconque vaut deux fois autant d'angles droits moins quatre, que le polygone a de côtés.* C. Q. F. T et D.

SCHOLIE.

136. Quelques auteurs ont cru que cette regle souffroit exception, dans le cas où la figure a un ou plusieurs angles rentrants comme dans la *figure* 62. Cela est fondé sur une fausse idée que l'on s'est formée de la maniere d'estimer la valeur d'un angle, en le mesurant toujours par un arc plus petit que 180°. Or on voit que l'angle BAH, pris au-dedans de la figure, sera nécessairement mesuré par un arc plus grand que 180°, et que la position respective des côtés AB, AH n'est pas plus déterminée par l'arc HK compris entre ses côtés, que par l'arc ALK également compris entre ses côtés, et supplément du premier, à quatre angles droits: en sorte que l'angle intérieur BAH est la somme de tous les angles formés par les lignes AD, AE, AF, AG, menées du point A à tous les angles du polygone. D'où suit une nouvelle démonstration du théorême trouvé au dernier problême.

En effet, ayant mené de l'angle A toutes les lignes que nous venons de nommer, le polygone se trouve encore décomposé en triangles; mais il n'y a plus autant de triangles qu'il y a de côtés

au polygone. Les lignes AB, BD; AH et GH, ne donnent que deux triangles, tandis que tous les autres côtés fourniront chacun un triangle. Donc si les lignes de division partent d'un des angles du polygone, il sera décomposé en autant de triangles moins deux qu'il a de côtés; et, à cause que les angles de chaque triangle valent deux droits, *la somme des angles intérieurs d'un polygone quelconque, lors même qu'il auroit un ou plusieurs angles rentrants, vaudra toujours deux fois autant d'angles droits moins quatre que le polygone a de côtés.*

PROBLÈME II.

137. *Supposant que l'on ait prolongé dans un même sens tous les côtés d'un polygone quelconque, trouver la somme de tous les angles extérieurs ainsi formés* (*fig.* 63 et 62).

SOLUTION.

Supposons d'abord que ce polygone n'ait point d'angle rentrant, comme dans les *figures* 63. Chaque angle extérieur du polygone avec l'angle adjacent fait deux droits: ainsi, par exemple, l'angle DBI et l'angle ABD pris ensemble valent deux droits; donc à cause que la même somme a lieu pour tous les angles du polygone, il est évident que *la somme des angles extérieurs formés par tous les côtés du polygone, prolongés dans un même sens avec celle des angles internes du polygone, fera autant de fois deux droits qu'il a de côtés.* Mais cette somme est aussi celle des angles du polygone avec tous les angles autour du

point C (n°. 136). Donc ôtant de ces sommes égales celle des angles intérieurs du polygone qui leur est commune, il viendra d'une part la somme des angles extérieurs et de l'autre celle des angles autour du point C. Or cette derniere vaut 360° ou quatre angles droits : d'où suit cette vérité que *si l'on prolonge dans un même sens tous les côtés d'un polygone quelconque dans lequel il n'y a point d'angle rentrant, la somme de tous les angles extérieurs ainsi formés par les prolongements des côtés du polygone ne vaudra jamais que quatre angles droits.* C. Q. F. 1°. T et D.

138. Supposons présentement qu'il y ait un ou plusieurs angles rentrants dans le polygone, comme l'angle A (*fig.* 62). Si l'on prolonge le côté AH de A en Q, il est visible que l'angle QAK est à retrancher de l'angle intérieur du polygone pour avoir deux droits. Donc en suivant le raisonnement fait ci-dessus, on trouvera que dans un *polygone qui a des angles rentrants, si on prolonge tous ses côtés dans un même sens, la somme de tous les angles extérieurs moins celle de tous les angles qui tomberont au-dedans du polygone par l'un des côtés de l'angle rentrant prolongé, vaudra toujours quatre angles droits.* C. Q. F. 2°. T et D.

COROLLAIRE I.

139. Donc les angles extérieurs d'un polygone quelconque diminueront d'autant plus que le nombre des côtés de ce polygone sera plus grand : et de plus, quoique l'on n'ait aucune idée claire et distincte d'un polygone irrégulier de mille cô-

tés, par exemple, on n'en peut pas moins conclure que la somme de tous ses angles intérieurs n'ira jamais au-delà de 1996 angles droits; et que celle de ses angles extérieurs, ou des angles extérieurs moins tous les angles qui tomberoient au-dedans du polygone par un des côtés prolongés, lorsqu'il a des angles rentrants, ne vaudra jamais ni plus ni moins que quatre angles droits ou 360°.

SCHOLIE.

140. Supposant qu'on ait levé le plan d'un polygone irrégulier, par la mesure actuelle de chacun de ses côtés, et des angles extérieurs formés par chacun de ses côtés avec le prolongement de celui qui le précede, on pourroit faire usage de cette proposition pour vérifier si ces angles ont été bien observés; car la somme de tous ces angles extérieurs ne doit pas s'éloigner sensiblement de quatre angles droits: mais nous devons prévenir que cette maniere d'opérer seroit une des plus vicieuses dans la pratique, parceque la plus petite erreur, dans un des angles, fait qu'il est presque impossible de fermer un tel polygone, lorsqu'on vient à le rapporter sur le papier.

CHAPITRE III.

De la mesure des surfaces planes terminées par des lignes droites ou circulaires.

DÉFINITIONS.

141. *MESURER une surface quelconque, c'est chercher combien de fois une autre surface prise par unité est contenue dans la surface à mesurer.*

La surface que l'on prend pour mesure ou pour unité, devant naturellement être la plus simple possible, on a pris de tout temps le quarré comme celle de toutes les *figures* régulieres qui peut se comparer avec plus de facilité à toutes les autres; de-là *quarrer* et *mesurer* une surface sont des mots synonymes en géométrie, comme nous l'avons déja dit. Il ne faut pourtant pas s'imaginer que le quarré soit la seule espece de figure que l'on puisse employer dans la mesure des surfaces. Toute figure pourroit être prise pour unité, quel que fût le nombre de ses angles et de ses côtés. L'arpent, la toise quarrée, le pied quarré, sont les mesures dont on fait le plus d'usage dans la mesure des surfaces. Nous donnerons à la fin de cet ouvrage un précis des regles du toisé, tant pour les surfaces que pour les solides.

PROBLÊME I.

142. *Trouver la surface d'un parallélogramme* ABCD (*fig.* 66).

SOLUTION.

Soit *abcd* la surface que l'on prend pour mesure ou pour unité: cette surface aura une base *ab* et une ligne *ef* qui en mesurera la hauteur: pareillement la ligne AB étant prise pour base du parallélogramme à mesurer, la perpendiculaire EF comprise entre ses deux côtés en exprimera la hauteur. Cela posé, ayant pris sur cette ligne une partie E φ égale à la hauteur *ef* du parallélogramme pris pour unité, et tiré une droite *cd* parallele à AB; il est visible que le parallélogramme ABCD contiendra le parallélogramme AB*cd*, autant de fois que la hauteur EF du premier contiendra la hauteur E φ ou celle *ef* de la surface prise pour mesure. Il n'est pas moins visible que le même parallélogramme AB*cd* contiendra le petit parallélogramme *abcd* autant de fois que sa base AB contient celle *ab* du même parallélogramme pris pour mesure. On aura donc ces deux proportions . . . ABCD : AB*cd* :: EF : *ef*.
et . . . . AB*cd* : *abcd* :: AB : *ab*.

Donc en multipliant par ordre, et divisant l'antécédent et le conséquent du premier rapport par AB*cd*, on aura ABCD : *abcd* :: EF × AB : *ef*×*ab* ou ABCD = $\frac{abcd \times EF \times AB}{ef \times ab.}$ d'où suit cette regle générale pour avoir l'aire d'un parallélogramme quelconque à l'égard d'une autre surface prise pour unité: *Cherchez combien de fois les dimensions du parallélogramme à mesurer contiennent celles de la surface prise pour unité; et par le produit de ces deux nombres abstraits, mul-*

tipliez l'unité superficielle : le produit qui en résulte exprimera l'aire ou la surface du parallélogramme à mesurer. C. Q. F. T et D.

SCHOLIE.

143. Quoique tous les auteurs élémentaires aient donné des regles sûres pour trouver la surface d'un parallélogramme quelconque, il est vrai néanmoins que la plupart se sont exprimés d'une maniere peu rigoureuse, lorsqu'ils ont établi *qu'un parallélogramme rectangle ou non rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur;* car on a vu dans l'arithmétique que tout multiplicateur est un nombre abstrait ou un nombre de fois; que tout produit doit avoir des unités de même nature que le multiplicande. Or, ici ces principes se trouveroient n'avoir aucune application, si l'on prend pour multiplicande la base du parallélogramme à mesurer; puisque cette base est une ligne, et non une surface; et que le multiplicateur ne seroit plus un nombre abstrait, si l'on prend pareillement la hauteur du parallélogramme à mesurer pour multiplicateur; et qu'enfin le produit, s'il exprime une surface comme on le prétend, n'auroit pas des unités de même nature que le multiplicande qui est une ligne. M. *Camus* avoit tellement cru qu'on ne pouvoit concilier la regle donnée pour la mesure des surfaces avec celles de la multiplication, qu'après les avoir exposées lui-même plus clairement qu'aucun autre, il avoit jugé à propos de faire une exception à des principes d'une généralité métaphysique. On pourroit être surpris de ce que des méthodes

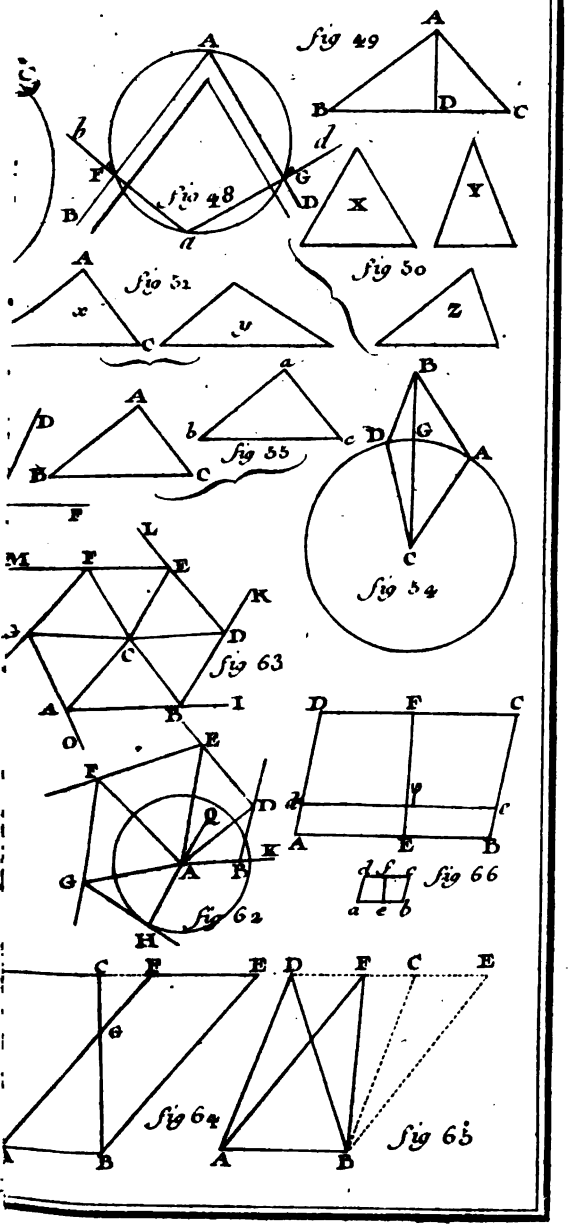


fig 49
fig 48
fig 50
fig 51
fig 55
fig 54
fig 63
fig 62
fig 66
fig 64
fig 65

méthodes aussi vicieuses dans leur énoncé n'entraînoient aucune erreur dans la pratique; mais pour peu qu'on y réfléchisse, on voit bientôt qu'il y a un cas où l'on peut regarder comme produit ce qui n'est qu'un des facteurs de ce même produit; c'est lorsque le multiplicande est l'unité. Or, c'est ce qui arrive ici, puisque le vrai multiplicande est l'unité superficielle qui a été prise pour mesure. Enfin, ajoutons encore que le nombre qu'on trouve en multipliant l'un par l'autre les rapports de la base à la base, et de la hauteur à la hauteur de l'unité, n'est et ne peut être qu'un nombre abstrait; et qu'il ne peut exprimer une surface, qu'autant qu'il est devenu multiplicateur de la surface prise pour mesure ou pour unité.

COROLLAIRE I.

144. Puisqu'un triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur (n°. 127), il s'ensuit *qu'on aura l'aire d'un triangle, en multipliant l'unité superficielle par la moitié du produit des nombres qui expriment le rapport de la base et de la hauteur du triangle à la base et à la hauteur de l'unité.*

COROLLAIRE II.

145. Donc en général deux parallélogrammes, ou deux triangles comparés à la même unité superficielle, *sont entre eux comme les produits des rapports de leurs bases et de leurs hauteurs à la base et à la hauteur de l'unité prise pour mesure.*

COROLLAIRE III.

146. *Donc deux parallélogrammes ou deux triangles qui ont même base ou des bases égales, sont entre eux comme leurs hauteurs; et s'ils ont même hauteur, ou des hauteurs égales, ils sont entre eux comme leurs bases.*

COROLLAIRE IV.

147. Donc si les produits des rapports qui expriment les aires de deux parallélogrammes ou de deux triangles sont égaux, il faut que la base et la hauteur du premier soient réciproques à la base et à la hauteur du second; ou, ce qui revient au même, que la base et la hauteur d'un parallélogramme ou d'un triangle fassent les extrêmes ou les moyens d'une proportion dont la base et la hauteur de l'autre parallélogramme ou triangle feront les moyens ou les extrêmes; puisque dans toute proportion le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. Donc en général *deux parallélogrammes ou deux triangles sont égaux en surface, lorsqu'ils ont des bases réciproques à leurs hauteurs.*

PREMIER SCHOLIE.

148. Ayant posé d'une maniere invincible les fondements de la mesure des surfaces, on peut, dans la pratique, adopter l'expression commune *qu'un parallélogramme est égal au produit de sa base par sa hauteur, et qu'un triangle est égal à la moitié de ce même produit*, comme plus courte

que la regle que nous venons de démontrer, sauf à ne jamais admettre que l'on puisse prendre une ligne pour multiplicande et une autre pour multiplicateur, mais en regardant comme base et hauteur les nombres qui ne sont réellement que les rapports abstraits de la base et de la hauteur de la surface à mesurer, à la base et à la hauteur de la surface prise pour mesure.

SECOND SCHOLIE.

149. On se sert de tout ce que nous venons d'établir sur l'égalité des triangles qui ont même base et même hauteur, ou qui ont même base et sont compris entre paralleles, pour réduire une figure ou un polygone irrégulier quelconque en une autre qui ait un ou plusieurs côtés de moins, ou même en un seul triangle qui lui soit égal en surface. On se sert aussi des mêmes principes pour élever ou abaisser des triangles ou des parallélogrammes à des hauteurs données. On voit encore que toutes les figures rectilignes pouvant se décomposer en triangles, il sera facile d'en avoir la surface, et de faire sur ces figures les opérations d'addition ou de soustraction, s'il est nécessaire. Toute la *géodésie* ou *division des champs* est une suite des principes que nous venons d'exposer. Nous allons joindre quelques problêmes dont nous donnerons des solutions graphiques, et ensuite des solutions numériques, que nous conseillerons toujours d'employer de préférence dans la pratique, comme plus exactes et plus rigoureuses que celles qui se font par des opérations de compas; supposant toutefois que

l'on a les vraies valeurs numériques des lignes nécessaires à la résolution du problême.

PROBLÊME II.

150. *Réduire un pentagone* ABCDE *en un triangle qui lui soit égal en surface* (*fig.* 67, *pl.* 5).

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Supposant que le triangle demandé doive avoir son sommet au point D, on menera de ce point les diagonales DA, DB, auxquelles on tirera les paralleles EF, CG terminées au prolongement de la ligne AB aux points F et G. Enfin du point D on menera les droites DF, DG, qui formeront le triangle demandé; car les triangles AFD, AED, BCD, BGD sont respectivement égaux, puisqu'ils ont même base et même hauteur étant compris entre paralleles; en leur ajoutant le triangle ADB, il viendra d'une part le triangle FDG égal au pentagone ABCDE de l'autre. C. Q. F. T et D.

SOLUTION NUMÉRIQUE.

Ayant abaissé du point D les perpendiculaires DL, DI, DK aux côtés AB, AE et BC prolongés autant qu'il sera nécessaire, et mesuré ces perpendiculaires sur une échelle de parties égales, ainsi que les côtés AB, AE, BC, on cherchera des lignes AF, BG sur la ligne AB prolongée autant qu'il sera nécessaire, et telles qu'on ait $AF \times DL = AE \times DI$ et $BG \times DL, = BC \times DK$; et les points ainsi déterminés donneront le triangle FDG que l'on demande. Supposant, par exemple, que l'on ait $DL = 300$, $AB = 140$, $AE =$

160, BC = 200, DI = 195 et DK = 180; on trouvera AF = $\frac{160\times195}{300}$ = 104; et BG = $\frac{200\times180}{300}$ = 120. C. Q. F. T et D.

NB. Les solutions numériques ont l'avantage de ne point obliger à tracer beaucoup de lignes qui doivent disparoître après la solution du problême, sans compter celui d'une précision très supérieure à toute opération graphique.

PROBLÊME III.

151. *Changer un triangle* BAC *en un triangle* BDF *qui lui soit égal et qui ait son sommet à un point donné D* (*fig.* 68).

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Je remarque d'abord que si le point donné D se trouvoit sur l'un des côtés du triangle à changer, le problême n'en seroit que plus facile à résoudre. Dans cette vue ayant mené la droite BD, je tire par le point A une droite AL parallele à BC qui coupe la premiere en un point *a*, par lequel je mene la droite *a*C; ce qui me donne le triangle B*a*C égal à BAC, et dont un des côtés passe par le point donné D. Je vois, de plus, que le point D étant plus élevé que les points A ou *a*, il faut que la base du nouveau triangle soit plus petite que celle du triangle BAC; supposant qu'elle est égale à la ligne BF, je mene la ligne DF et la droite ponctuée *a*F : cela posé, puisque les triangles B*a*C, BDF, sont supposés égaux; si l'on en retranche la partie commune B*a*F, les restes *a*CF, *a*DF seront encore égaux. Mais ces

triangles ont une base commune aF ; donc ils auront même hauteur ; ou, ce qui revient au même, leurs sommets D, C doivent se trouver sur une droite parallèle à la même ligne aF. On voit, de plus, que la ligne DC est donnée de position ainsi que le point a ; donc aF sera aussi donnée de position et parallèle à la ligne DC. Cette analyse fournit la construction suivante.

CONSTRUCTION.

Ayant joint les points B et D par la ligne BD qui coupe une droite AL parallèle à BC dans un point a, par ce point soit menée la ligne aF parallèle à DC, et du point D soit menée la ligne DF ; le triangle BDF sera celui qu'on demande : car les triangles aDF, aCF sont égaux, puisqu'ils ont même base aF et même hauteur, par construction. Donc en leur ajoutant le triangle commun BaF, on aura $BDF = BaC = BAC$, puisque ces deux derniers ont aussi même base et même hauteur. C. Q. F. T et D.

SOLUTION NUMÉRIQUE.

Ayant abaissé des points A et D les perpendiculaires AG, DK sur la ligne AB prolongée s'il est nécessaire, et mesuré ces lignes sur une échelle de parties égales, ainsi que la base BC ; on cherchera une droite BF, telle qu'on ait $BF \times DK = BC \times AG$; ou $BF = \frac{BC \times AG}{DK}$. La ligne BF ainsi déterminée, et mesurée sur la même échelle, donnera le point F que l'on demande, et par conséquent le triangle BDF égal au triangle BAC.

Supposons par exemple que l'on ait trouvé BC = 210, AG = 255, DK = 340; on trouvera $BF = \frac{210 \times 255}{340} = 157\frac{1}{2}$.

On s'y prendroit de la même maniere, s'il falloit abaisser le triangle BAC à une hauteur moindre que sa hauteur AG; dans tous les cas de cette nature, les triangles doivent avoir des bases réciproques à leurs hauteurs.

PROBLÊME IV.

152. *Trouver un triangle* PQR *égal en surface à plusieurs triangles donnés* BAC, DFG, MNO; *ou, ce qui revient au même, faire l'addition de plusieurs surfaces proposées* (*fig.* 70).

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Supposant que la hauteur PQ du triangle PQR, qui doit être égal à la somme des triangles proposés, soit une ligne donnée; on commencera par changer tous les triangles donnés en d'autres qui leur soient égaux en surface, et qui aient tous la même hauteur; ce qui se fera par le problême précédent. Ensuite ayant pris une ligne PR égale à la somme des bases des nouveaux triangles, et sur laquelle PQ soit perpendiculaire, on tirera la droite QR, et le problême sera résolu. C. Q. F. T et D.

SOLUTION NUMÉRIQUE.

Si l'on connoît par une échelle de parties égales la base et la hauteur de chaque triangle, ainsi que la hauteur PQ; on n'aura pas besoin de ré-

duire les triangles à la hauteur donnée : il suffira de faire une somme des produits des nombres qui expriment les bases et les hauteurs, et de diviser cette somme par le nombre des parties contenues dans la hauteur PQ : le quotient donnera la base PR que l'on demande.

Supposons donc que l'on ait BC = 170, AI = 190; DG = 140, FK = 110; OM = 230, NL = 150, et PQ = 260; on trouvera PR $= \frac{170\times190+140\times110+230\times115}{260} = \frac{7415}{26} = 285\frac{5}{26}$.

SCHOLIE.

153. On pourroit faire usage des constructions numériques et géométriques précédentes pour retrancher un triangle d'un autre triangle donné; ou, ce qui revient au même, pour pratiquer la soustraction sur les surfaces données, même lorsqu'elles auroient plus de trois côtés, sauf à les réduire d'abord en triangles. On voit également que, par les mêmes principes, on pourroit assigner un triangle qui fût à un autre dans une raison donnée; ce qui ne differe pas de la multiplication ou division des surfaces, sans exiger qu'elles soient semblables. Nous verrons par la suite comment ces opérations se pratiquent avec cette condition. Les mêmes principes vont nous servir à résoudre encore quelques problêmes.

PROBLÊME V.

154. *Changer une figure irréguliere qui a un angle rentrant en* C, *en une autre qui lui soit égale et qui n'ait que des angles saillants* (*fig.* 70 *bis*).

SOLUTION.

Ayant joint la droite BD par le point C, menez-lui une droite CF parallele terminée au côté DE, et tirez la droite BF; le quadrilatere ABFE n'aura plus d'angle rentrant, et sera celui qu'on demande, comme il est évident, à cause des triangles égaux BCD, BFD, qui retranchés du même quadrilatere ABDE, laissent les restes égaux ABCDE, ABFE. C. Q. F. T et D.

PROBLÊME VI.

155. *Partager un triangle* BAC *en raison donnée par une ligne menée d'un point aussi donné* D, *sur l'un de ses côtés* (*fig. 71 bis*).

SOLUTION.

Divisez la base BC dans la raison donnée au point E et tirez AE; joignant AD, par le point E menez la droite EF parallele à AD, et tirez DF qui sera la ligne demandée. Si les mesures du triangle étoient connues en nombres, la solution arithmétique n'auroit pas plus de difficulté.

PROBLÊME VII.

156. *Partager un triangle donné* BAC *en trois parties égales par des lignes menées d'un point* D *donné sur un de ses côtés* (*fig. 72 bis*).

SOLUTION.

Ayant divisé la base BC en trois parties égales

aux points F, G, et tiré la droite AD au point donné D; des points F et G ainsi déterminés menez les droites FI et GL parallèles à cette même droite AD, et le problême est résolu; à cause que les triangles AFD, AID, AGD, ALD, sont respectivement égaux, comme ayant même base et même hauteur par construction, et que le triangle FAG est égal au tiers du triangle BAC. C. Q. F. T et D.

PROBLÊME VIII.

157. *Diviser un pentagone irrégulier* ABCDE *en quatre parties égales par des lignes qui partent d'un des angles* A *de ce même polygone (fig. 69).*

SOLUTION.

Réduisez le pentagone ABCDE en un triangle BAF qui lui soit égal, et qui ait son sommet au point A; divisez sa base AF en quatre parties égales aux points G, H, I; et tirez les lignes AG, AH, AI. Comme la seule ligne AG tombe au-dedans du pentagone, il est visible qu'elle est la seule qui donne une des divisions demandées au-dedans de ce polygone. Pour trouver les autres lignes, on menera la diagonale AC, et par le point H, une ligne HK qui lui soit parallele; la droite AK sera la seconde ligne demandée. Menant encore IL parallele à AC, et qui rencontre AD en L, puis tirant AL, le problême est entièrement résolu; c'est-à-dire que les lignes AG, AK, AL, divisent le pentagone proposé en quatre parties égales.

Car les triangles AHC, AKC, ayant même base

et même hauteur par construction, sont égaux en surface : donc en leur ajoutant le triangle commun AGC, on aura GAH=AGCK. Mais le triangle GAH est le quart du pentagone ABCDE ; donc aussi AGCK est le quart du même pentagone. De même les triangles AIC et ALC sont égaux, puisqu'ils ont même basé et même hauteur (construction). Otant de chacun des grandeurs égales GAH et AGCK, il reste HAI égal à LAK. Donc le quadrilatere AEDL sera le quatrieme quart du pentagone proposé, puisque la figure ABCL en est les trois quarts. C. Q. F. T et D.

Scholie.

158. Si l'on connoît les bases et les hauteurs des triangles dans lesquels on peut décomposer le pentagone proposé, il sera facile, sans le réduire en un seul triangle, de le diviser numériquement en tant de parties égales que l'on voudra, par des lignes menées d'un point quelconque au-dedans du polygone proposé. Les commençants pourront s'exercer à résoudre ce problême sur une figure qu'ils se donneront à volonté.

Problême IX.

159. *Trouver la surface d'un polygone irrégulier quelconque* ABCDEF, *terminé par des lignes droites* (*fig.* 71 *et* 72).

Solution.

Réduisez le polygone en triangles ou par des lignes menées d'un angle quelconque A du poly-

gone, comme AC, AD, AE (*fig.* 71), ou par des lignes menées d'un point quelconque O, pris au-dedans de sa surface, comme OA, OB, OC, OD, OE, OF (*fig.* 72). Cherchant la valeur de chacun de ces triangles, leur somme sera la surface du polygone à mesurer. C. Q. F. T et D.

NB. En général si le polygone n'est pas déja divisé en triangles par des lignes qui partent d'un point pris au-dedans de sa surface, il vaudroit mieux tirer ces lignes d'un des angles du polygone, parcequ'on aura moins de triangles à calculer. Il faut de plus avoir l'attention de prendre pour base un côté commun à deux triangles sur lequel on aura abaissé des angles opposés les perpendiculaires qui mesurent les hauteurs de ces triangles. Ainsi, dans la *fig.* 71, on prendra la ligne AE pour base des triangles AFE, ADE, et l'on trouvera la surface de ces deux triangles par une seule opération, en multipliant la ligne AE par la demi-somme des perpendiculaires FH et DL. On trouve de même la surface des triangles ADC et ABC, en multipliant la base commune AC par la demi-somme des perpendiculaires DI, BL, abaissées des angles opposés sur cette base. Nous ferons voir bientôt la maniere de mesurer les polygones terminés par des lignes courbes irrégulieres, comme cela se rencontre souvent dans l'arpentage.

CHAPITRE IV.

Des polygones réguliers en général; maniere de déterminer leurs surfaces, d'où l'on déduit les regles pour mesurer la surface du cercle et de ses parties.

DÉFINITION.

160. *UN polygone régulier est une figure dont tous les angles et dont tous les côtés sont égaux.*

COROLLAIRE.

161. Il suit de cette définition qu'il y a au-dedans de tout polygone régulier un point également éloigné de tous les angles et de tous les côtés qui est le *centre* de ce polygone.

162. La distance du centre à chacun des angles du polygone, comme CA (*fig.* 73), se nomme *rayon oblique*, et la perpendiculaire abaissée du centre sur chaque côté se nomme *rayon droit*. On distingue encore plusieurs especes d'angles dans un polygone régulier : 1°. L'angle formé par deux côtés contigus du même polygone, comme ABD, se nomme *angle du polygone*. 2°. Celui formé par deux rayons obliques, terminés aux extrémités d'un même côté AB, comme ACB, se nomme *angle au centre*; l'angle compris entre un côté quelconque AB du polygone et le rayon oblique CA, se nomme *angle sur la base*. 4°. Enfin on peut considérer l'angle formé par le rayon

droit et le rayon oblique comme ACK. Cet angle est la moitié de l'angle au centre, comme l'angle sur la base est la moitié de celui du polygone.

COROLLAIRE.

163. Il suit des définitions précédentes que tout polygone régulier peut être inscrit dans un cercle qui auroit pour rayon le rayon oblique ; et circonscrit à un autre cercle qui auroit pour rayon le rayon droit, ou la perpendiculaire abaissée du centre sur chacun des côtés du polygone.

PROBLÈME I.

164. *Trouver pour un polygone régulier quelconque*, 1°. *l'angle au centre;* 2°. *l'angle du polygone;* 3°. *l'angle sur la base.*

SOLUTION.

1°. Puisque tous les angles autour du centre sont égaux entre eux dans un polygone régulier, et que d'ailleurs tous les angles autour d'un point valent 360°; il est clair que, pour avoir l'angle au centre dans un polygone régulier, il faut diviser 360° par le nombre des côtés du polygone.

2°. et 3°. Puisque les trois angles d'un triangle valent deux droits, et que l'angle au centre est toujours compris entre deux rayons égaux, comme CA, CB (*fig.* 72), il s'ensuit que le triangle ACB est isoscele, et qu'en ôtant l'angle au centre de deux droits, il reste l'angle du polygone, dont la moitié est l'angle sur la base, ou celui compris entre le rayon oblique et le côté du polygone. C. Q. F. T et D.

COROLLAIRE.

165. Donc si l'on désigne par n le nombre des côtés d'un polygone, l'angle au centre, comme ACB, sera égal à $\frac{360^\circ}{n} = \frac{180 \times 2}{n}$; ôtant cet angle de deux droits, l'angle du polygone, comme ABD, sera égal à $180 - \frac{180 \times 2}{n} = \frac{180 \times n - 2}{n}$. Enfin la moitié de cet angle sera l'angle sur la base, et son expression est $\frac{180 \times (n-2)}{2n}$. Mettant ces angles avec leurs valeurs sous la forme de rapports, on aura ACB : ABD : BAC :: $\frac{180 \times 2}{n}$: $\frac{180 \times n-2}{n}$: $\frac{180 \times n-2}{2n}$. Divisant par 180, et multipliant tout par $2n$, on aura cette nouvelle forme, ACB : ABD : BAC :: $4 : 2n-4 : n-2$, proportion qui exprime les rapports des angles d'un polygone régulier quelconque eu égard au nombre des côtés du polygone.

PREMIER SCHOLIE.

166. En général, tous les problèmes qu'on peut proposer relativement aux polygones réguliers, peuvent se réduire à deux: car ou bien l'on connoît le rayon d'un cercle, et l'on propose de trouver le côté d'un polygone régulier dont le nombre des côtés est donné; ou, ce qui revient au même, de diviser la circonférence en autant de parties égales qu'il y a de côtés dans le polygone; ou encore d'assigner le rapport du côté de ce polygone avec le rayon du cercle: ou bien on donne le côté du polygone, et l'on de-

mande le rayon du cercle, dans lequel doit être inscrit le polygone dont le côté est ainsi donné. Ce problême est, comme on le voit, l'inverse du précédent. On peut aussi le regarder comme le même que s'il s'agissoit de *construire sur une ligne donnée un triangle isoscele, tel que l'angle au sommet fût à l'angle sur la base, comme le nombre constant 4 est à un nombre désigné par* $n-2$, *n étant le nombre des côtés du polygone.*

SECOND SCHOLIE.

167. Il s'en faut beaucoup que l'on sache inscrire dans un cercle un polygone régulier de tant de côtés que l'on voudra, ou que sur une ligne donnée on puisse décrire un polygone régulier d'un nombre donné de côtés, malgré les prétendues solutions générales de ce problême données dans nombre d'auteurs de géométrie pratique, et dans celle de *le Clerc* en particulier. Nous observerons, et on le verra par la suite, que toutes les fois qu'on peut diviser géométriquement la circonférence en un certain nombre de parties égales, on peut assigner le rapport fini de la corde de cet arc avec le rayon, ou du côté du polygone régulier qui a ce même nombre de côtés, avec le rayon; et réciproquement, toutes les fois qu'on a le rapport du côté d'un polygone régulier avec le rayon, on peut diviser géométriquement la circonférence du cercle en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le nombre des côtés du polygone. Il faut encore distinguer les polygones réguliers en deux classes, les uns que j'appelle *polygones primitifs*, et les autres

autres que je nomme *dérivés*. Les premiers sont ceux dont le nombre des côtés est exprimé par un nombre premier, comme 3, 5, 7, 11, 13, etc. et les seconds sont ceux qui se déduisent des premiers par des subdivisions des arcs qui leur appartiennent, suivant la progression double ou triple. Le triangle équilatéral, le quarré, et le pentagone réguliers, ont les seuls polygones primitifs, dont on ait la construction géométrique; c'est-à-dire les seuls qui puissent se décrire avec la regle et le compas. En général, la théorie des polygones réguliers a toujours mérité la plus grande attention de la part des géometres; parceque chaque polygone primitif peut et doit être regardé comme le premier terme d'une suite infinie dont le dernier donneroit la quadrature du cercle, s'il étoit possible de l'exprimer. C'est uniquement sous ce point de vue que nous les considérons dans ce chapitre.

THÉORÈME I.

168. *Le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon du cercle auquel il est inscrit* (*fig.* 73).

DÉMONSTRATION.

L'angle ACB étant égal à la sixieme partie de la circonférence sera de 60°; et retranchant cette quantité de 180°, il vient 120° pour la somme des angles CAB et CBA, et par conséquent 60° pour chacun des mêmes angles, puisque les côtés CA et CB sont égaux comme rayons du même cercle; donc les trois angles du triangle ACB sont égaux; donc ce triangle est équilatéral, et par con-

séquent AB = AC; c'est-à-dire que *le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon du cercle auquel il est inscrit.* C. Q. F. D.

La même vérité se déduit également du rapport général, trouvé ci-dessus, entre l'angle au centre et l'angle sur la base dans la formule ACB : CAB :: 4 : $n - 2$; en faisant dans cette expression $n = 6$; car alors on aura ACB : CAB :: 4 : 4; donc CAB = ACB = 60°.

Corollaire.

169. Donc la même ouverture de compas qui a servi à décrire une circonférence de cercle, la divise en six parties égales; et si l'on tire les cordes AD, DF et FA, on aura le triangle équilatéral inscrit au même cercle.

Premier Scholie.

170. On déduit de cette propriété du rayon une méthode d'élever, par un point donné C sur une droite MN, une perpendiculaire à cette même ligne (*fig.* 74).

Pour cela, du point donné C comme centre avec un rayon CA à volonté, on décrira un arc de cercle, approchant de 180°, sur lequel on portera l'ouverture du compas de A en B, et de B en D; des points B et D, comme centres, on tracera deux autres petits arcs *mn*, *op*, qui se couperont dans un point F au-dessus de BD; enfin par le point F ainsi trouvé et le point donné C, on menera la droite CF, qui sera la perpendiculaire demandée; puisque, les arcs AB et BD étant de 60° chacun, la ligne CF, étant perpen-

diculaire à la corde, la divise ainsi que l'arc BD en deux également ; donc BG = 30°, et par conséquent AG = 90°.

Si le point C se trouve tellement situé qu'il ne soit pas commode d'avoir l'arc BD, on peut se contenter du seul arc AB de 60°. Car, ayant tiré la ligne AB, on la prolongera jusques en F, en sorte que BF soit égale à BA, et la ligne CF sera la perpendiculaire demandée.

Second Scholie.

171. On se sert de cette même propriété du rayon pour diviser le quart de cercle dans ses 90°, ou la circonférence entiere en 360° : car, ayant déterminé d'abord géométriquement le quart de cercle AG, comme on vient de le dire (*fig.* 74), on portera le rayon de G en L, ce qui donnera les arcs AL, LB et BG chacun de 30°. Divisant chacun en deux parties égales, on aura six arcs de 15° ; et si, après avoir pris le tiers de chacun, on divise chaque tiers en cinq parties égales, on aura l'arc d'un degré. Toute cette opération est exprimée dans ce seul vers latin :

In tres, in binas, in tres, in quinque secato.

Remarquons cependant que nous ne donnons point cette pratique comme rigoureuse et géométrique : la division de l'arc de 15° en trois parties égales, ainsi que celle de ce tiers en cinq, ne se font que par tâtonnement. Nous n'indiquons cette méthode que comme une opération qui peut suffire dans la pratique, lorsque l'on a un peu d'adresse et d'habitude à manier le compas. En général *il*

n'existe aucune méthode géométrique d'arriver à l'arc de cinq degrés, non plus qu'à l'arc d'un degré. Nous verrons par la suite que l'on peut trouver géométriquement l'arc de trois degrés; et par conséquent l'arc de 15° se divise géométriquement en cinq parties égales. Cette derniere méthode peut être employée de préférence à la premiere, pour diviser le quart de cercle en ses 90°, puisqu'il n'y a de tâtonnement que pour l'arc de 3°.

TROISIEME SCHOLIE.

172. Observons encore que, quoiqu'il n'y ait pas de moyen de diviser géométriquement un arc quelconque en trois parties égales, il y a cependant plusieurs arcs qui sont susceptibles d'une telle division géométrique, c'est-à-dire, suivant l'acception des anciens, avec la regle et le compas. Nous venons de voir en effet que la circonférence entiere se divise en trois parties égales; par le théorême présent, la demi-circonférence se divise pareillement en trois parties égales. Nous avons trouvé l'arc de 30° qui est le tiers de 90°; sa moitié sera pareillement le tiers de 45°, et ainsi de suite; d'où nous conclurons que tous les arcs provenants de la subdivision de la circonférence entiere, suivant la progression géométrique décroissante à l'infini, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, etc. sont rigoureusement divisibles en trois parties égales.

QUATRIEME SCHOLIE.

173. Cette derniere propriété du rayon d'être égale à la corde de 60° dans un cercle quel-

conque, est la base de toutes les opérations que l'on peut faire avec la ligne des cordes sur le compas de proportion pour la mesure des angles, pour inscrire dans un cercle tel polygone régulier que l'on voudra, pour décrire sur une ligne donnée une portion de cercle capable d'un angle donné, etc. C'est toujours des points marqués 60 sur chaque ligne des cordes qu'il faut régler l'ouverture du compas de proportion pour exécuter toutes ces opérations ou celles qui leur sont analogues.

PROBLÊME II.

174. *Trouver la surface d'un polygone régulier quelconque* (*fig.* 73).

SOLUTION.

Puisque le polygone est supposé régulier, si du centre à chacun de ses angles on mene les rayons obliques tels que CA, CB; tous les triangles, comme ABC, BCD, etc. dans lesquels il se trouvera partagé, seront égaux entre eux; ainsi l'aire d'un polygone régulier quelconque vaudra autant de fois celle d'un de ces triangles, qu'il y a de côtés dans le polygone. Mais l'aire du triangle ACB $= \frac{AB \times CK}{2}$; donc si le polygone est de six côtés, sa surface sera $\frac{6AB \times CK}{2}$; s'il est de 8, de 9, et en général d'un nombre n de côtés, sa surface sera $\frac{8AB \times CK}{2}$, $\frac{9AB \times CK}{2}$, ou $\frac{nAB \times CK}{2}$. Or, le côté d'un polygone, pris autant de fois qu'il y a de côtés dans ce même polygone,

n'est autre chose que le contour de ce polygone; donc *l'aire d'un polygone régulier quelconque est égale au produit du contour de ce polygone, par la moitié de la perpendiculaire abaissée du centre sur l'un quelconque de ses côtés*; ou, si l'on veut s'exprimer plus rigoureusement, *au produit de l'unité superficielle par la moitié du produit des nombres de fois que les dimensions de cette unité sont contenues respectivement dans le contour du polygone, et dans la hauteur de l'un quelconque de ses triangles.* C. Q. F. T. et D.

PROBLÈME III.

175. *Considérant le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, trouver sa surface.*

SOLUTION.

Supposant une suite de polygones réguliers inscrits au même cercle et dont le nombre des côtés augmente indéfiniment, il est évident que plus le dernier polygone aura de côtés, plus chacun de ses côtés sera petit, et par conséquent approchera de se confondre avec l'arc dont il est la corde; plus aussi le contour de ce polygone approchera d'égaler la circonférence du cercle, et plus enfin la perpendiculaire abaissée du centre sur chacun des côtés sera près d'être égale au rayon du cercle; donc puisque la surface de tout polygone régulier se trouve en multipliant son contour par la moitié de la perpendiculaire abaissée du centre sur un des côtés (n°. 174), cette regle aura encore lieu pour le cercle considéré comme limite de tous les polygones réguliers qui

peuvent lui être inscrits. Donc *la surface du cercle est égale au produit de sa circonférence entiere par la moitié du rayon, ou de sa demi-circonférence par le rayon tout entier.* C. Q. F. T. et D.

COROLLAIRE I.

176. Donc le fameux problême *de la quadrature du cercle se réduit à déterminer le rapport de la circonférence d'un cercle quelconque à son rayon ou à son diametre pris pour unité.* Car ces lignes sont toujours connues pour un cercle quelconque, et sont d'ailleurs celles auxquelles il convient mieux, à tous égards, de comparer la circonférence.

Scholie sur le rapport du diametre à la circonférence.

177. Toutes les recherches des géometres sur la circonférence concourent à établir que le rapport de cette ligne au diametre ou au rayon ne peut être exprimé par des nombres finis et rationels. Peut-être même n'est-il pas assignable par une suite finie de nombres irrationels. Ainsi l'on est forcé de s'en tenir aux approximations les plus exactes, et en même temps les plus simples.

Archimede, qui vivoit environ 300 ans avant J. C., paroît être le premier qui se soit occupé du rapport de la circonférence au diametre. Pour y parvenir, il inscrivit au cercle un polygone régulier de 96 côtés, et circonscrivit aussi au même cercle un autre polygone régulier du même nombre de côtés.

Le résultat de ses calculs lui fit connoître que le contour du polygone inscrit étoit plus grand que $3\frac{10}{71}$ du diametre, et que celui du polygone circonscrit étoit moindre que $3\frac{10}{70}$ du même diametre; d'où il pouvoit conclure à plus forte raison, que le rapport de la circonférence au diametre étoit un peu moindre que celui de 22 à 7. Si l'on réduit aux deux rapports que nous venons de trouver les entiers en fractions, et qu'ensuite on réduise les fractions elles-mêmes au même dénominateur, on trouvera que la premiere équivaut à $\frac{1561}{497}$, et que la 2e est égale à $\frac{1562}{497}$. Donc si l'on suppose le diametre de 497 parties égales, la circonférence sera un peu moindre que 1562, et un peu plus forte que 1561; de maniere que ce travail d'Archimede établit la circonférence entre des limites déja très rapprochées.

C'est en vain que d'ignorants quadrateurs se sont efforcés de rendre suspect ce rapport d'*Archimede*, sous prétexte qu'il a été forcé d'employer dans ses calculs des nombres irrationels, dans la détermination du côté de son polygone. M. *Montucla*, dans son histoire des recherches sur la quadrature du cercle, observe, d'après M. de *Lagny*, qu'il y a, dans le choix des nombres employés par le géometre grec, une adresse d'analyse qui suppose la solution d'un problême qui n'a été résolu que long-temps après lui. Ce problême consiste à *trouver les plus petits nombres entiers à deux, à trois, ou à quatre chiffres, qui expriment avec le plus de précision possible une quantité irrationnelle déterminée.* Voyez l'ouvrage cité, page 29 et suivantes.

Après le rapport d'Archimede, celui dont on a fait le plus d'usage dans la pratique, et qui est beaucoup plus exact, est le rapport de 113 à 355 trouvé par *Métius*, mathématicien hollandois. Si on compare ce rapport avec celui d'Archimede, en multipliant le diametre par $3\frac{1}{7}$, on verra qu'il seroit de 113 : $355\frac{1}{7}$; ainsi il ne differe que de la 7me partie d'un 113me du diametre, et donne la circonférence par défaut; mais beaucoup plus près que celui d'Archimede, qui la donne par excès. *Ludolphe de Cologne* a calculé le rapport de la circonférence au diametre jusqu'au 35me chiffre après l'unité. Supposant donc son diametre égal à 1, il a trouvé que la circonférence étoit plus grande que 3,14159, 26535, 89793, 23846, 26433, 83279, 50288, et moindre que le même nombre augmenté de l'unité.

Dans la pratique la plus rigoureuse, pour tout ce qui pourroit avoir rapport aux toises des bâtiments, le rapport de 355 à 113 est d'une exactitude suffisante. M. *Seguin*, architecte très instruit dans toutes les parties de son art, a donné le rapport de 1521 à 484, plus exact que celui d'*Archimede*, et un peu moins vrai que celui de *Métius;* mais il a un avantage précieux dans la pratique, c'est qu'il est exprimé par deux nombres quarrés, et qu'en prenant la racine il se réduit à celui de 39 à 22.

Corollaire II.

178. Il suit de là que la circonférence entiere étant égale au diametre multiplié par le rapport de 22 à 7, si l'on se sert de celui d'*Archimede;* ou

par celui de 355 à 113, si l'on fait usage du rapport de *Métius;* la demi-circonférence sera égale au rayon multiplié par les mêmes rapports; ou bien en désignant par $\frac{m}{n}$ ces différents rapports, cette même ligne sera exprimée par $\frac{mr}{n}$; en nommant r le rayon d'un cercle, quel qu'il puisse être. Et par conséquent, puisque, par le n° 175, l'aire du cercle est égale au produit de sa demi-circonférence par le rayon, on aura cette même surface égale à $\frac{mrr}{n}$; c'est-à-dire que *la surface d'un cercle quelconque est égale au quarré de son rayon, multiplié par le rapport de la circonférence au diametre:* en sorte que, si ce rapport est exprimé par deux nombres quarrés d'une maniere très approchée, on aura en nombre finis et rationels le côté d'un quarré sensiblement égal à l'aire du cercle; et c'est là ce qui se trouve au rapport de 1521 à 484 donné ci-dessus.

COROLLAIRE III.

179. Donc si l'on connoît le rayon d'un cercle, il sera facile d'avoir sa surface au moins approchée; et si *l'on connoît la surface,* il sera *également très aisé d'avoir le rayon qui convient à cette surface, en la divisant par le rapport que l'on aura adopté, et prenant ensuite la racine quarrée du quotient.* Développons tout ceci par quelques applications.

PROBLÊME IV.

180. *Connoissant le rapport du diametre à la*

circonférence, trouver 1° *celle d'un cercle dont le diametre est exprimé en mesures connues;* 2° *déterminer la longueur d'un arc quelconque, d'un nombre de degrés aussi connu.*

SOLUTION.

Puisque toute circonférence est égale au produit de son diametre par le rapport d'une circonférence quelconque à son diametre, ou, ce qui revient au même, puisque *les circonférences des différents cercles sont comme leurs diametres;* il est visible que, ce rapport une fois connu, pour avoir la circonférence d'un cercle dont le diametre est exprimé en mesures connues, désignant le rapport de la circonférence au diametre par le rapport général $m : n$, et le diametre par D, il n'y a qu'à faire cette proportion, $m : n :: D : \frac{nD}{m}$. C. Q. F. 1° T. et D.

2°. Pour avoir la longueur d'un arc de cercle d'un nombre de degrés donnés; à cause qu'il y a même rapport de la circonférence entiere à la longueur d'un arc d'un nombre de degrés quelconque, que de 360° au nombre de degrés de l'arc; il n'y a qu'à multiplier la fraction générale $\frac{nD}{m}$ par *celle qui exprime le rapport des degrés du même arc à* 360 *degrés.* C. Q. F. 2° T. et D.

EXEMPLE PREMIER.

181. On demande la circonférence d'un cercle dont le diametre est de 58 pieds. Je multiplie 58 par 22, et je divise le produit 1276 par 7, le

quotient $182\frac{2}{7}$ est la valeur approchée de la circonférence de même cercle. Si l'on se fût servi du rapport de *Métius*, on auroit trouvé la même circonférence égale à $182\frac{24}{113}$.

EXEMPLE II.

182. Supposant toujours le diametre d'un cercle de 58 pieds, on demande la longueur d'un arc de 64°. Pour la trouver, on fera la proportion, $360° : 64° :: 182\frac{2}{7} : x = 182\frac{2}{7} \times \frac{64}{360} = 182\frac{2}{7} \times \frac{8}{45} = 32^{p}\ 4°\ 10^{l}\frac{18}{35}$ de ligne. Si l'on se fût servi du rapport de *Métius*, on auroit eu, pour premiere expression de la longueur du même arc, $58 \times \frac{355}{113} \times \frac{8}{45} = 58 \times \frac{71 \times 8}{113 \times 9} = 58 \times \frac{568}{1017} = 32^{p}\ 4°\ 8^{l}\frac{72}{113}$ de ligne.

PROBLÊME V.

183. *Connoissant le rayon d'un cercle exprimé en mesures déterminées, trouver la surface du même cercle en mesures quarrées de même dénomination.*

SOLUTION.

Par le n° 178, tout se réduit à multiplier le quarré d'un rayon par le rapport de la circonférence au diametre ; et le produit exprimera l'aire du cercle avec d'autant plus de précision que le rapport qu'on aura choisi sera plus exact. Dans la pratique ordinaire, il suffit de multiplier le quarré du rayon par $\frac{22}{7}$. Si l'on a besoin d'une plus grande exactitude, on multipliera ce même quarré par le rapport de $\frac{355}{113}$ donné par *Métius;* ou, si l'on vouloit assigner le côté d'un quarré sensible-

ment égal au cercle, par $\frac{1521}{484}$. Par exemple, si l'on me demande l'aire d'un cercle qui ait 56 pieds de rayon, je multiplie son quarré par $\frac{22}{7}$, ou, ce qui revient au même, par $3\frac{1}{7}$; et je trouve pour cette surface 9856. En se servant du rapport de *Métius*, on eût trouvé pour la même surface $9852\frac{4}{113}$ un peu moindre que la véritable. En faisant usage du rapport de $\frac{1521}{484}$, on eût eu d'abord pour côté du quarré très à peu près égal au cercle $\frac{28\times 39}{11}$, dont le quarré donne $9855\frac{2}{121}$, pour la surface du même cercle qui differe très peu des expressions précédentes de la même surface. C. Q. F. D.

PROBLÊME VI.

184. *Connoissant la surface d'un cercle par rapport à une unité superficielle donnée, trouver le rayon de ce même cercle.*

SOLUTION.

On multipliera la surface donnée par la fraction $\frac{7}{22}$, ou par la fraction $\frac{113}{355}$; puis on prendra la racine quarrée du produit: cette racine sera le rayon cherché du cercle dont la surface étoit proposée; et cela avec d'autant plus de précision que le rapport par lequel on aura multiplié la surface donnée sera plus approchant du rapport du diametre à la circonférence.

Par exemple, si l'on me demandoit le rayon d'un cercle dont la surface fût de 9856 pieds quarrés, je multiplierois ce nombre par 7, et je diviserois le produit par 22; il vient 3136, dont

la racine 56 est la valeur du rayon demandé.

Cette opération est une suite nécessaire de ce que *l'aire du cercle est égale au quarré du rayon multiplié par le rapport de la circonférence au diametre.* Donc pour repasser de la surface donnée du cercle à son rayon, il faut opérer suivant une marche absolument inverse; ce qui se fait en divisant cette surface par le rapport de la circonférence au diametre, et prenant la racine quarrée du quotient. C. Q. F. T. et D.

PROBLÊME VII.

185. *Connoissant le rayon d'un cercle et le nombre de degrés d'un arc quelconque* ADB (*fig.* 75), *trouver* 1° *l'aire du secteur* ACB *terminé par cet arc et les rayons* CA *et* CB, 2° *la surface du segment compris entre le méme arc et la corde* AB.

SOLUTION.

Il est évident qu'il y a essentiellement même rapport entre la surface du cercle et celle d'un secteur quelconque, qu'entre la circonférence entiere et celle de l'arc qui termine ce secteur; ainsi *pour avoir l'aire d'un secteur, on multipliera celle du cercle entier par le rapport de l'arc du secteur à la circonférence entiere; ou, ce qui revient au méme, par le rapport du nombre de degrés de l'arc à* 360°. C. Q. F. 1°. T. et D.

2°. Il n'est pas moins visible que la surface d'un segment quelconque, comme ADB, est égale à celle du secteur ACBDA, moins celle du triangle ACB; mais l'aire du secteur, considéré comme

composé d'une infinité de petits triangles qui auroient leur sommet au centre, et leurs bases répandues sur l'arc ADB, est égale à $\frac{ADB \times AC}{2}$, et celle du triangle ACB est égale à $\frac{AC \times BF}{2}$; en supposant une perpendiculaire BF abaissée de l'extrémité de l'arc AB sur le rayon qui passe par l'autre extrémité du même arc. (On a appellé toute ligne, comme BF, *sinus* de l'arc auquel elle répond). On aura donc l'aire du segment égale à $\frac{ADB \times AC}{2} - \frac{BF \times AC}{2} = (ADB - BF) \times \frac{AC}{2}$. D'où il suit que *l'aire d'un segment quelconque est égale au produit de la moitié du rayon, par la différence de l'arc qui termine ce segment au sinus du même arc.* C. Q. F. 2°. T. et D.

OBSERVATION.

186. On voit donc que pour calculer avec précision l'aire d'un segment de cercle, dont le rayon est donné, ainsi que le nombre de degrés de l'arc qui termine ce segment; il faut 1°. calculer la longueur de cet arc en parties du rayon, ce qui se fera aisément par le n°. 180; 2°. déterminer la valeur du sinus de cet arc en parties du même rayon. Pour cela, il faut faire usage de la table des sinus naturels de tous les arcs depuis 0°, 0', jusqu'à 90°, et qui se trouvent calculés avec la plus grande précision dans les tables des sinus. C'est ce que nous allons enseigner dans l'exemple suivant.

187. Soit proposé, par exemple, de *trouver*

1°. *l'aire d'un secteur* ACBDA, 2°. *celle du segment* ADB; *en supposant que l'on connoisse le rayon* AC *de 56 pieds, et l'arc* ADB *qui termine le secteur et le segment de* 52° 30'. 1°. Ayant trouvé par le n°. 183 l'aire du cercle de 9856, en y employant le rapport d'*Archimede*, je multiplie cette surface par le rapport de 52° 30' à 360°, ou, ce qui revient au même, par la fraction $\frac{3150}{21600}$, ou par cette même fraction réduite à sa plus simple expression $\frac{7}{48}$, ce qui me donne $1437\frac{1}{3}$ pour la surface demandée.

2°. Pour avoir la surface du segment déterminé par ce même arc et au même rayon, je commence par chercher la longueur de cet arc par cette analogie, 180°: 52° 30' :: $56^{pi} \times \frac{22}{7}$: ADB $= 51,33333$, à un cent millieme de pied près. Je détermine ensuite la valeur de la perpendiculaire BF par cette proportion, 100000 : 79335 (sinus de 52° 30' pris dans les tables) :: 56 : BF; je trouve cette ligne égale à $44^{pi}, 42760$; retranchant cette quantité de la longueur de l'arc, trouvée ci-dessus, j'ai, pour la différence de l'arc au sinus, 6,90573, qui, multipliée par 28, moitié du rayon, donne par l'aire du segment 193,360, ou 193 pieds $\frac{2}{3}$ à très peu près.

PREMIER SCHOLIE.

188. Si l'arc qui termine un segment à mesurer est d'un petit nombre de degrés, et qu'il soit possible de trouver avec précision la valeur de la petite fleche DG, abaissée du milieu de l'arc sur sa corde, en parties du rayon; on aura la surface du même segment avec beaucoup de précision,

en

en multipliant cette corde par les deux tiers de la fleche. Cette pratique est fondée sur ce que *tout arc de cercle d'un petit nombre de degrés se confond sensiblement avec un arc de parabole, qui auroit la même corde;* et que *tout segment parabolique est rigoureusement égal au produit de sa corde par les deux tiers de sa fleche;* ce qui se trouve démontré dans tous les traités de *sections coniques.*

SECOND SCHOLIE.

189. Si la surface à mesurer se trouvoit être une portion de celle d'un cercle dont le rayon fût donné, et comprise entre deux cordes quelconques, comme AB, DF, et deux arcs AF, BD (*fig.* 76 et 77); il seroit facile, d'après ce qui précede, d'en déterminer la valeur, pourvu que l'on connût les nombres de degrés dont ces arcs, sont les cordes ou de leurs suppléments, soit que le centre du cercle se trouve entre les deux cordes, comme dans la *figure* 76, soit qu'il se trouve au-dehors de ces mêmes cordes. Dans le premier cas, *on ajoutera les arcs* AF, BD *exprimés en parties du rayon, avec les sinus* BK *et* DG *calculés ainsi qu'il a été dit au n°.* 187, *et l'on multipliera cette somme par la moitié du rayon; le produit sera la surface* ABDF. Dans le second cas, *on prendra de même la somme des arcs* AF, BD, *et après leur avoir ajouté la différence des sinus* DG, BK, (ou des perpendiculaires abaissées des extrémités D, B, des arcs FD, AB, sur les rayons CF et CA, qui passent par leurs origines), *on multipliera le tout par la moitié du rayon* AC; *le*

produit sera la surface ABDF, *que l'on demande.* Les commençants pourront s'exercer à trouver la démonstration de cette pratique. On remarquera de plus que, dans l'un et dans l'autre cas, la surface à trouver sera toujours la même, quelle que soit la position respective des cordes AB, DF, tant que ces cordes seront les mêmes, et du même côté à l'égard du centre.

Troisieme Scholie.

190. Enfin, au moyen de tout ce qui précede, on sera en état de trouver la surface d'une figure quelconque, terminée par des lignes droites, et par des arcs de cercle ou même par des courbes, qui ne pourroient pas se ramener à des arcs de cercle, comme dans la *figure* 78. *On commenceroit par tracer dans la figure un polygone irrégulier et rectiligne dont on trouveroit la surface, en le décomposant en triangles. Ensuite on mesureroit les petits segments extérieurs au polygone, comme des segments paraboliques, en multipliant leurs bases respectives par les deux tiers de la perpendiculaire abaissée du point le plus élevé de chaque portion de courbe sur la corde qui lui répond; sauf à ne tenir aucun compte des parties ou segments qui pourroient se compenser, lorsqu'ils seroient égaux, et que l'un se trouveroit au-dedans du polygone, et l'autre au-dehors.* Cette proposition renferme presque toute la pratique de l'arpentage, où il se rencontre souvent des portions de terres terminées par des lignes courbes très irrégulieres au droit des chemins ou sentiers qui séparent les parties à mesurer.

CHAPITRE V.

Des lignes proportionnelles ; des figures semblables en général, et en particulier des triangles semblables ; des lignes coupées en parties proportionnelles ; divers usages des lignes ainsi divisées.

Nous supposons nos lecteurs instruits de la nature des rapports et des proportions, comme aussi des changements qu'on peut leur faire subir sans troubler l'égalité des rapports, qui constitue l'essence de ces mêmes proportions. Il suffit donc de donner la théorie des lignes proportionnelles, sans répéter sur des figures géométriques tout ce qui a été démontré en arithmétique à l'égard des nombres en proportion géométrique ; surtout si l'on fait attention que les propriétés fondamentales des proportions peuvent se démontrer d'une maniere infiniment générale, comme autant de conséquences nécessaires de l'égalité des rapports, quelles que soient les grandeurs entre lesquelles se trouvent établies ces mêmes proportions.

J'ai simplifié par-là considérablement les éléments de géométrie, sans nuire à la clarté et à l'évidence des propositions qui doivent en former l'ensemble et le développement.

THÉORÊME I.

191. *Si l'on coupe les côtés d'un triangle* BAC *par une droite* FG, *parallele à sa base* (*fig.* 79); *ces mêmes côtés seront coupés en parties proportionnelles; c'est-à-dire que l'on aura cette suite de rapports égaux*, AB : AF : BF :: AC : AG : GC.

DÉMONSTRATION.

Soient tirées les lignes BG, CF; les triangles FBG, FCG seront égaux en surface, puisqu'ils ont même base et même hauteur; donc si on leur ajoute le triangle FAG, les nouveaux triangles AGB, AFC seront aussi égaux. Cela posé, les lignes AB, AF, BF étant les bases des triangles AGB, AGF, FGB, qui ont le sommet au même point, seront entre elles comme ces mêmes triangles, et donneront AB : AF : BF :: AGB : AGF : FGB; mais parceque ces trois derniers triangles sont respectivement égaux aux triangles AFC, AFG, GFC, on aura :

AGB : AGF : FGB :: AFC : AFG : GFC; donc à cause que ces derniers ont tous un sommet commun en F, et qu'ayant ainsi même hauteur, ils sont entre eux comme leurs bases, on aura :

AFC : AFG : GFC :: AC : AG : GC; donc enfin, puisque la suite des rapports égaux n'a pas été interrompue, on aura

AB : AF : BF :: AC : AG : GC; d'où il suit évidemment que *toute ligne, comme* FG, *parallele à la base* BC *d'un triangle quelconque, divise ses côtés en parties proportionnelles.* C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

192. Il suit du théorême présent que la ligne FG aura avec la base BC du triangle BAC le même rapport que la ligne AF avec AB, ou que la ligne AG avec AC; en sorte que les trois côtés du triangle FAG seront proportionnels aux trois côtés du triangle BAC. Pour le démontrer, soit tirée la ligne DG parallele à AB; la *figure* BDGF sera un parallélogramme; ce qui donne FG = BD. Mais, par le théorême actuel, on a BC : BD ou FG :: AC : AG :: AB : AF; d'où il suit que les trois côtés du triangle FAG sont proportionnels à ceux du triangle BAC, et aussi qu'il y a même rapport de FG à BC que de AF à AB, ou de AC à AG.

COROLLAIRE II.

193. Il est visible que la proposition seroit également vraie, si la ligne FG, parallele à BC, coupoit les lignes AB, AC au-dessus du sommet A du triangle BAC. Il n'est pas moins évident que la figure du même triangle ne peut altérer en aucune maniere la vérité du théorême; donc il a également lieu sur un triangle équilatéral, comme sur un triangle isoscele. Or, c'est ce dernier cas qui a donné à *Galilée* l'idée du compas de proportion dont il est l'inventeur, et dont toutes les lignes sont construites d'après les principes du théorême présent dans le cas où le triangle est isoscele, combinés d'ailleurs avec d'autres principes analogues aux différents objets des lignes tracées sur cet instrument.

THÉORÈME II.

194. *Si les côtés d'un triangle* BAC *sont coupés en parties proportionnelles par une droite quelconque* FG (*fig.* 79), *je dis que cette même ligne sera parallele à la base* BC *du même triangle.*

DÉMONSTRATION.

Supposant toujours qu'on ait tiré les lignes BG, CF; il est visible que tout se réduit à prouver l'égalité des triangles FBG et FCG : car si ces triangles sont démontrés égaux, comme ils ont même base, il faudra qu'ils soient compris entre paralleles. Cela posé on a d'abord

AGB : AGF :: AB : AF; mais par hypothese,

AB : AF :: AC : AG, et encore

AC : AG :: AFC : AFG.

Donc puisque la suite des rapports égaux n'a pas été interrompue, on aura AGB : AGF :: AFC : AFG. Mais les conséquents de cette proportion sont égaux, puisque le triangle AGF ou AFG est égal à lui-même; donc les antécédents sont aussi égaux; ce qui donne AGB = AFC. Otant de chacun le triangle FAG, il vient FBG = FCG; donc FG est parallele à BC, puisque ces triangles égaux, ayant même base, doivent aussi avoir même hauteur, ou, ce qui revient au même, être compris entre paralleles. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

195. Il suit de-là que *si l'on divise un angle quelconque d'un triangle* BAC (*fig.* 80) *en*

deux parties égales par une droite AD ; *cette ligne divisera la base du même triangle en parties* BD et DC, *proportionnelles aux côtés* AB, AC, *de l'angle ainsi divisé.*

Pour le démontrer, sur AB prolongée soit prise AF = AC, et soit tirée CF, qui donnera le triangle isoscele CAF, dont l'angle CAF extérieur au triangle BAC est supplément de l'angle A du même triangle; donc à cause des côtés AC, AF égaux par construction, l'angle ACF est égal au demi-supplément de CAF. Or, dans notre supposition, l'angle CAD est aussi le demi-supplément du même angle CAF, et d'ailleurs cet angle est alterne de ACF; donc les lignes AD, CF sont paralleles; donc on aura AB : AF ou AC :: BD : DC; c'est-à-dire que *la ligne qui divise l'angle* BAC *du triangle en deux parties égales, divise aussi la base* BC *en parties proportionnelles aux mêmes côtés.*

On fera voir de même que si la ligne A*d* divise l'angle CAF, supplément de l'angle BAC du même triangle, en deux parties égales, elle donnera aussi sur la base BC, prolongée autant qu'il sera nécessaire, un point *d* tel qu'on aura A*d* : B*d* :: AB : AC; ce qui se démontrera de la même maniere, en prenant sur AB une ligne A*f* = AC, et tirant C*f*, qui donnera C*f* parallele à A*d*.

COROLLAIRE II.

196. Puisque les angles BAC, CAF valent deux droits, comme angles de suite, et que chacun est divisé en deux parties égales; il s'ensuit que les angles CAD, CA*d* pris ensemble font

un droit; donc si sur D*d*, comme diametre, on décrit une demi-circonférence, le point A sera dans cette circonférence (n°. 90). Or, comme cela arrivera de la même maniere pour tout triangle dont les côtés AB, AC seroient dans le même rapport, il s'ensuit que la circonférence de cercle est le lieu des sommets de tous les triangles qui, ayant une même base BC, auroient leurs côtés AB, AC dans un rapport donné.

CHAPITRE VI.

Des figures semblables en général, et en particulier des triangles semblables.

DÉFINITIONS.

197. *Deux polygones* ABCDEF, *abcdef sont semblables, lorsque tous les angles de l'un sont égaux à tous les angles de l'autre, chacun à chacun; et que les côtés à l'entour des angles égaux, pris deux à deux, sont proportionnels.*

198. *Les côtés qui renferment les angles égaux dans deux polygones semblables, sont nommés côtés homologues ou correspondants.*

OBSERVATION.

199. Deux polygones d'un même nombre de côtés peuvent avoir tous leurs angles égaux, sans être semblables; parceque l'égalité des angles n'entraîne pas l'égalité de rapports entre les côtés qui renferment ces angles égaux. Réciproquement

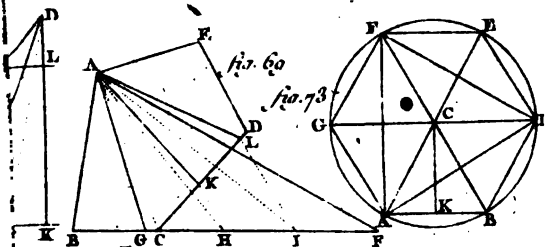


fig. 60
fig. 73

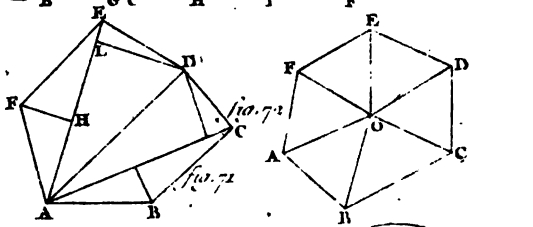


fig. 71
fig. 72

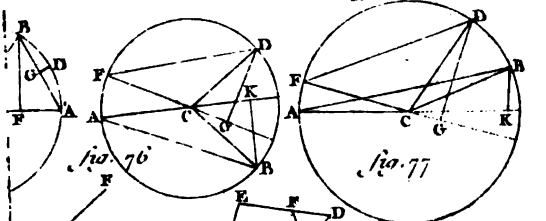


fig. 76
fig. 77

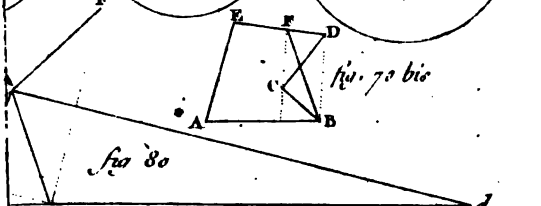


fig. 78 bis
fig 80

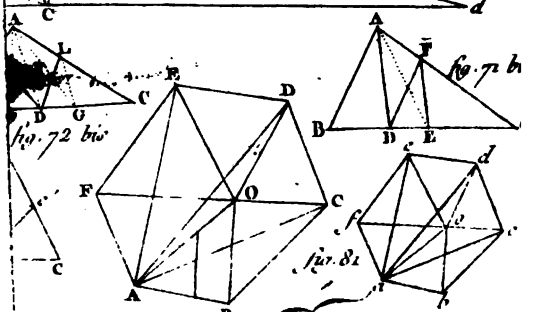


fig. 72 bis
fig. 81

deux polygones d'un même nombre de côtés peuvent avoir tous ces côtés proportionnels deux à deux, sans avoir les angles égaux entre ces côtés; parceque la proportion des côtés n'entraîne pas avec elle l'égalité des angles. Ainsi une des conditions établies dans la définition des polygones semblables ne suffit pas pour que deux figures d'un même nombre de côtés soient semblables. Mais lorsque les figures sont des triangles, alors il suffit que les angles soient égaux, ou que les côtés, à l'entour des angles égaux, soient proportionnels, pour que ces mêmes triangles soient semblables

Des triangles semblables, et des conditions qui les rendent tels.

THÉORÈME I.

200. *Deux triangles* BAC, *bac, sont semblables* (*fig.* 82), *lorsque les trois côtés de l'un sont proportionnels aux trois côtés de l'autre; c'est-à-dire lorsque l'on aura* AB : AC : BC :: *ab* : *ac* : *bc.*

DÉMONSTRATION.

Il est visible, par la définition des figures semblables, que tout se réduit à prouver que les angles compris entre les côtés proportionnels sont égaux. Pour y parvenir, sur les côtés AB, AC du triangle BAC soient prises les parties A*b'* A*c'*, respectivement égales aux côtés *ab*, *ac* du triangle *bac;* et soit tirée la ligne *b' c'*. Cela posé, puisque l'on a par hypothese AB : AC :: *ab* : *ac;* on aura aussi,

par notre construction présente, AB : AC :: Ab' : Ac'; donc la ligne $b'c'$ divise les côtés AB, AC en parties proportionnelles; donc cette ligne (n°. 191) est parallele à la base BC; et de plus par le (n°. 192) cette même ligne $b'c'$ aura avec BC le même rapport que AB avec ab, ou que AC avec ac; ce qui donne les proportions suivantes: BC : $b'c'$ :: AB : Ab', et BC : bc :: AB : ab; donc puisque les antécédents sont les mêmes dans ces deux proportions, on aura aussi $b'c'$: bc :: Ab' : ab. Mais on a fait Ab' : = ab; donc $b'c'$ = bc; donc le troisieme côté du triangle b'Ac' est égal au troisieme côté du triangle bac; puisque les deux premiers Ab', Ac' du premier ont été faits égaux aux côtés ab, ac du second. Donc à cause que le troisieme est aussi démontré égal au troisieme, ces deux triangles sont égaux en tout par le premier caractere d'égalité parfaite; donc leurs angles opposés aux côtés égaux sont égaux. Mais à cause des paralleles BC, $b'c'$, A$b'c'$ est égal à ABC, et A$c'b'$ est égal à ACB; et de plus l'angle A est commun aux deux triangles; donc ils ont les angles égaux, et les côtés à l'entour de ces angles proportionnels; donc BAC et b'Ac' sont semblables, et partant BAC et bac le sont également, puisque bac est démontré égal en tout au triangle b'Ac'; donc enfin, *deux triangles sont semblables, lorsque les trois côtés de l'un sont proportionnels aux trois côtés de l'autre.* C. Q. F. D.

THÉORÊME II.

201. *Deux triangles* BAC, bac *sont sembla-*

bles, lorsqu'ils ont un angle égal, compris entre côtés proportionnels, c'est-à-dire lorsque l'on aura bac = BAC, et de plus la proportion AB : AC :: *ab* : *ac*.

DÉMONSTRATION.

Soit appliqué le sommet *a* du triangle *bac* sur le sommet A du triangle BAC, en observant d'ailleurs que le côté *ab* se confonde avec le côté AB, ou soit couché sur le même côté. Le côté *ac* tombera aussi nécessairement sur le côté AC; car si cela n'arrivoit pas, ce seroit signe que l'angle *bac* ne seroit pas égal à l'angle BAC, contre l'hypothese; donc puisque les côtés *ab*, *ac* étoient proportionnels aux côtés AB, AC avant que d'être appliqués sur ces côtés, ils le seront encore après avoir été couchés sur ces mêmes côtés et donneront A*b'* : A*c'* :: AB : AC; donc si l'on tire *b'c'*, cette ligne sera parallele à la base B*c'*, (n°. 194) et les trois angles du triangle *b'*A*c'* seront égaux à ceux du triangle BAC, à cause que l'angle A leur est commun, et que les angles *b'*, *c'*, sont égaux aux angles B, C, pour raison des lignes paralleles BC, *b'c'*; donc le triangle *b'*A*c'* est semblable au triangle BAC, puisqu'ils ont les angles égaux et les côtés proportionnels. Mais le triangle *b'*A*c'* n'est autre chose que le triangle *bac* appliqué sur le grand triangle; donc aussi *bac* est semblable à BAC; donc enfin *deux triangles sont semblables quand ils ont un angle égal, compris entre côtés proportionnels*. C. Q. F. D.

THÉORÊME III.

202. *Deux triangles* BAC, *bac, sont semblables lorsqu'ils ont deux angles b, c, égaux respectivement à deux angles* B, C *sur des bases quelconques* BC, *bc.*

DÉMONSTRATION.

Ayant pris sur BC la ligne BG, égale à *bc*, et par le point G mené la droite G*c'*, parallele à AB, puis par ce dernier point la droite *c'b'* parallele à BC, la *figure* BG *c' b'* sera un parallélogramme, dont les côtés opposés BG, *b'c'* seront égaux entre eux, et au côté *bc* par construction; donc à cause que les angles *b', c'* sur *b'c'* sont égaux aux angles B, C sur BC par la nature des paralleles, et que ces derniers sont égaux par hypothese aux angles *b, c* sur la base *bc;* on aura dans les deux triangles *b'* A*c'*, *bac*, les angles égaux sur des bases égales *b' c', bc* par construction; donc ces deux triangles sont égaux en tout par le troisieme caractere d'égalité parfaite des triangles; donc puisque l'on a *b'* A*c'* semblable à BAC, à cause des angles égaux et des côtés proportionnels, on aura aussi *bac* semblable à BAC; donc enfin *deux triangles bac,* BAC, *sont semblables lorsque deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre sur des bases bc,* BC *dans un rapport quelconque.* C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

203. Puisque les bases *bc*, BC, sont entre elles dans tel rapport que l'on voudra; il s'ensuit que

deux triangles seront semblables lorsque deux angles de l'un seront égaux à deux angles de l'autre sur des bases quelconques.

En sorte que quand même les côtés de l'un seroient infiniment petits à l'égard des côtés de l'autre, les triangles n'en seroient pas moins semblables dès que deux angles de l'un seroient égaux à deux angles de l'autre.

COROLLAIRE.

204. Donc deux triangles rectangles sont semblables quand ils ont un angle commun; car ils ont alors deux angles égaux chacun à chacun. Ce caractere se présente souvent, et l'on ne peut trop s'appliquer à le retenir. De même encore on pourra conclure que si deux triangles isosceles ont un angle commun, ou un angle égal, ils sont pareillement semblables.

OBSERVATION.

205. Dans chacun des trois théorêmes précédents, l'énoncé ne suffisoit pas pour démontrer la similitude des triangles qu'il falloit établir; mais on a démontré dans chacun que le triangle *bac* étoit nécessairement égal en tout à un autre triangle nécessairement semblable au triangle BAC, d'après la construction dont on a fait usage. L'on a dû remarquer que le caractere d'égalité parfaite dont on s'est servi étoit toujours l'analogue de celui de similitude qu'il falloit démontrer. Outre ces trois caracteres, il y en a encore un quatrieme qui se déduit de la position respective des côtés des deux triangles que l'on veut prouver

semblables; comme ce dernier se présente souvent, et qu'il est alors le plus simple à reconnoître, il est à propos de l'établir ici dans sa plus grande généralité.

THÉORÊME IV.

206. *Deux triangles* BAC, *bac sont semblables* (*fig.* 83, *planche* VI), *lorsque les côtés de l'un font des angles égaux avec les côtés de l'autre, en les prolongeant autant qu'il est nécessaire.*

DÉMONSTRATION.

Soit donc le triangle *bac* dont les côtés *ab, ac, bc,* prolongés autant qu'il en est besoin, font des angles égaux avec les côtés AB, AC, BC du triangle BAC aussi prolongés, s'il le faut, indéfiniment. Cela posé, concevons que le triangle *bac*, détaché en quelque maniere du plan sur lequel il est tracé y tienne néanmoins au moyen d'un axe passant par un de ses points, et autour duquel il puisse tourner; il est visible que lorsque le côté *ab* sera devenu, par ce mouvement, parallele au côté AB, les côtés *ac, bc* seront aussi paralleles aux côtés AC et BC, avec lesquels ils faisoient des angles égaux à celui fait par les côtés *ab* et AB, à cause d'un mouvement égal et commun à toutes les parties du triangle. Mais lorsque deux triangles ont leurs côtés paralleles, ils sont nécessairement semblables, d'où suit la vérité du théorême à démontrer. C. Q. F. D.

207. Si l'on regardoit cette démonstration comme peu géométrique, parcequ'elle dépend du mouvement qui la rend un peu méchanique,

il est aisé d'en trouver une autre de la plus grande rigueur. En effet, supposant toujours les côtés du triangle *bac*, prolongés jusqu'à ce qu'ils rencontrent ceux du triangle BAC, aux points a', b', c' où ils font avec les côtés AB, BC et AC des angles égaux, comme on le suppose; nous aurons d'abord les triangles AD a' et a D c', qui sont semblables à cause des angles en D égaux dans chacun, comme opposés au sommet, et des angles A a D, ac' D, par la supposition; donc le troisieme en A est égal au troisieme en a. On démontrera de même que les triangles CFc', c F b' sont semblables à cause des angles en F, opposés au sommet, et des angles Cc'F, cb'F aussi égaux, par l'hypothese; donc les angles FC c', F cb' sont égaux; et par conséquent les angles ACB, acb qui leur sont opposés par le sommet le sont encore; donc si les côtés d'un triangle comme bac font des angles égaux avec ceux d'un autre triangle BAC, il est démontré que ces deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun; donc il est démontré que ces triangles sont semblables. C. Q. F. D.

Observation.

208. Pour mieux découvrir les proportions que donnent des triangles semblables, comme BAC, *bac*, il convient de les écrire, ainsi qu'on le voit ici, de maniere que les angles égaux tiennent le même rang dans la nomination. Avec cette attention, on apperçoit sur le champ les côtés homologues ou correspondants, et même sans voir la figure, on trouve les proportions dont

on peut avoir besoin : occupons-nous de la résolution de quelques problêmes qui dépendent des principes précédents.

PROBLÊME I.

209. *Partager une ligne donnée* MN *en parties proportionnelles à celles d'une droite* AB (*fig.* 84), *divisée comme l'on voudra aux points donnés* F, G, L.

SOLUTION.

Puisque toutes les parties correspondantes de deux lignes coupées par tant de lignes droites parralleles que l'on voudra, sont proportionnelles, il est visible que tout se réduit à trouver sur une ligne A b = MN, et faisant avec AB un angle à volonté des parties comprises entre lignes parralleles, ce qui fournit cette construction.

Sur une droite indéfinie AZ, qui fasse avec AB tel angle qu'on voudra, soit prise une partie A b = MN ; puis ayant joint les points B, b, par une droite Bb soient menées les lignes Ff, Gg, Ll, toutes paralleles à la premiere ; la droite Ab sera divisée aux points f, g, l de la même maniere que la ligne AB l'est aux points F, G, L ; ou ce qui revient au même, les parties Af, fg, gl, lb feront une suite de quantités proportionnelles aux parties correspondantes AF, FG, GL, LB de la droite AB, comme cela est évident par le théorême du (n°. 191) ; ainsi transportant avec le compas ces mêmes parties sur la droite donnée MN, le problême sera résolu. C. Q. F. T. et D.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

210. Si l'on craint de ne pas diviser la ligne donnée avec assez de précision, ce qui arrive lorsque les sections formées par les paralleles, deviennent trop obliques; on pourra faire usage de la construction suivante établie sur les mêmes principes.

Sur AB (*fig.* 85), on décrira un triangle équilatéral ACB; puis ayant porté la ligne MN sur chacun des côtés CA, CB, du même triangle, prolongés, s'il est nécessaire, de C en *a* et *b*, on tirera la droite *ab*, et du point C les droites CF, CG, CL, qui couperont la ligne *ab* aux points demandés *f*, *g*, *l*; comme il est évident à cause des paralleles AB, *ab*, qui donnent la suite des triangles *aCf*, *fCg*, *gCl*, *lCb*, semblables chacun à chacun à la suite des triangles ACF, FCG, GCL, LCB, d'où l'on tirera A*f* : *fg* : *gl* : *lb* :: AF : FG : GL : LB.

COROLLAIRE.

211. Il est visible que ces deux solutions peuvent également servir à diviser une ligne donnée en tant de parties égales que l'on voudra, sans aucun tâtonnement et par une méthode géométrique. C'est sur ces deux solutions qu'est fondée la construction de la ligne du compas de proportion, intitulée *ligne des parties égales*, et dont l'usage est de servir à diviser des lignes données en tant de parties égales que l'on voudra; ce qui peut abréger beaucoup l'opération, quand ce nombre est un nombre impair.

PROBLÊME II.

212. *Trouver une quatrieme proportionnelle à trois lignes données* M, N, O (*fig.* 86, 87 et 88).

SOLUTION.

Sur les côtés d'un angle quelconque GAL, on prendra les lignes AB, AC, AD respectivement égales aux droites données M, N, O; puis ayant joint les points B et D par la droite BD, on lui menera par le point C la parallele CF; et la ligne AF sera la quatrieme proportionnelle demandée; à cause des paralleles BD CF, qui donnent AB: AD :: AC : AF; et que d'ailleurs on a fait AB, AC, AD respectivement égales aux lignes données M, N, O : ce qui établit la vérité de notre solution.

On auroit pu résoudre le même problême en prenant les lignes AB, BC, AD (*fig.* 87), respectivement égales aux lignes données M, N, O; puis menant BD, et CF parallele à cette derniere; car on aura toujours, à cause de ces mêmes paralleles, AB : BC :: AD : DF.

Enfin, on peut encore donner une troisieme solution du même problême (*fig* 88), comme il suit. Sur une ligne indéfinie AG, à partir du point fixe A, prenez les lignes AB, AC, respectivement égales aux lignes données M, N; puis élevant par le point B une droite indéfinie BK, prenez sur cette ligne BD égale à la troisieme ligne O; enfin tirant ADL, et menant par le point C, CF parallele à BD, cette ligne sera la

quatrieme proportionnelle demandée par le (n°. 192).

COROLLAIRE I.

213. Il est visible que chacune des trois solutions qu'on vient de voir peut également servir à trouver une troisieme proportionnelle à deux lignes données M, N; en prenant, dans les *figures* 86 et 87, AD égale à la ligne N, et B D égale à cette même ligne dans la *figure* 88, puis achevant les solutions comme ci-dessus.

COROLLAIRE II.

214. Puisque, dans toute proportion géométrique, le quatrieme terme est égal au produit des moyens divisé par l'extrême connu, on aura AF (*fig.* 86) $= \frac{AC \times AD}{AB}$; donc on peut faire usage des triangles semblables pour construire toute expression fractionnaire, comme celle qu'on vient de voir. On trouveroit avec la même facilité la valeur d'une fraction beaucoup plus compliquée, telle que $\frac{AB \times AD \times AF \times AG}{CD \times DE \times EF}$; quel que fût le nombre des facteurs du numérateur, et celui des facteurs du dénominateur; pourvu qu'il y en ait toujours un de plus au premier qu'au second.

Car supposant que chaque facteur est représenté par une ligne; par le dernier problême on chercheroit d'abord la valeur de la fraction $\frac{AB \times AD}{CD}$, que l'on feroit égale à une ligne GH; et la premiere expression se réduira à celle-ci

$\frac{GH \times AF \times AG}{DE \times EF}$; cherchant de même une droite IK $= \frac{GH \times AF}{DE}$, nous aurions, pour nouvelle et derniere expression de la fraction proposée $\frac{IK \times AG}{EF}$, que l'on construira pareillement, au moyen d'une troisieme proportionnelle aux lignes EF, IK et AG.

COROLLAIRE III.

215. Puisque toute multiplication, comme toute division, se réduit en général *à trouver une quantité qui soit à une autre dans un rapport donné, du multiplicateur à l'unité,* si c'est une multiplication; *ou de l'unité au diviseur,* si c'est une division; il suit encore de nos solutions que si l'on prend la premiere ou la seconde des trois lignes données M, N, O pour unité, la quatrieme proportionnelle, trouvée comme il a été dit dans ces mêmes solutions, exprimera le produit ou le quotient d'une multiplication ou d'une division. C'est ainsi que M. *Descartes,* dans sa géométrie, enseigne à pratiquer sur les lignes les opérations de multiplication et de division; idée heureuse qui fait une partie de l'application de l'algebre à la géométrie, et pour laquelle il fut blâmé par quelques géometres de son temps, qui, probablement, ne l'entendoient point.

COROLLAIRE IV.

216. S'il y avoit autant de termes au numérateur qu'au dénominateur de la fraction à construire; cela n'empêcheroit pas d'en venir à bout,

et la fraction pourroit toujours exprimer une ligne. Dans ce cas, il n'y a qu'à restituer une autre ligne donnée qui a été prise pour unité. Nous n'insistons pas davantage sur cet objet, qui est plus du ressort de la construction des quantités algébriques, que des éléments de géométrie.

COROLLAIRE V.

217. Puisque, dans toute proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens; il s'ensuit que si l'on regarde ces mêmes extrêmes comme les côtés contigus d'un rectangle, et ces moyens comme les côtés contigus d'un autre rectangle; ces deux rectangles seront égaux en surface: donc, par le moyen des lignes proportionnelles, on pourra changer un rectangle, dont AC et AD seroient les côtés contigus, en un autre qui lui seroit égal en surface, et qui auroit une ligne donnée AB pour un de ses côtés, en cherchant une ligne AF, quatrieme proportionnelle aux lignes données AB, AC, AD, ce qui donneroit AB × AF = AC × AD. On pourroit de même changer un quarré donné en un rectangle de même surface, et qui auroit une ligne donnée pour base, en cherchant une troisieme proportionnelle à cette ligne et au côté du quarré donné.

THÉORÊME.

218. *Si par les extrémités* P, Q *d'une droite donnée* PQ, *on mene deux lignes droites* PM, QN *paralleles entre elles, et deux autres droites* P*m*, Q*n aussi paralleles entre elles et proportion-*

nelles aux deux premieres; je dis que ces mêmes lignes couperont la droite PQ, *prolongée, s'il est nécessaire, en un seul et même point* (*fig.* 89).

DÉMONSTRATION.

Supposons que la droite MN rencontre PQ, prolongée en T, et que la droite *mn* rencontre la même droite en un autre point *t*, différent du premier, s'il est possible; tout se réduit à prouver que les droites PT, *pt* sont égales; ou, ce qui revient au même, que ces mêmes lignes ont un rapport égal avec la droite PQ. Cela posé, à cause des paralleles PM, QN, les triangles TPM, TQN sont semblables, et donnent
PT : QT :: PM : QN, et à cause des lignes P*m*, Q*n* proportionnelles aux droites PM, QN, on a PM : QN :: P*m* : Q*n*; et à cause des triangles *t*P*m*, *t*Q*n* semblables à raison des paralleles, P*m* : Q*n* :: P*t* : Q*t*; donc, puisque la suite des rapports égaux n'a pas été interrompue, on aura, en concluant du premier au dernier, PT : QT :: P*t* : Q*t*; donc *detrahendo* QT — PT : PT :: Q*t* — P*t* : P*t*, ou PQ : PT :: PQ : P*t*; donc on aura PT = P*t*, puisque les antécédents de ces rapports égaux sont égaux. C. Q. F. D.

La proposition seroit également vraie, si l'une des lignes PM étoit au-dessus de PQ, et que l'autre PN fût au-dessous de la même droite, et qu'il en fût de même des lignes P*m*, Q*n*. Seulement les droites MN, *mn* couperoient la droite PQ dans un seul et même point T, situé entre P et Q (*fig.* 86, *bis*). Ce seroit encore la même chose dans l'un et dans l'autre cas, si les lignes

P*m*, Q*n* étoient couchées sur les droites PM, QN ; tout dépend du parallélisme de ces mêmes lignes, et de l'égalité de leurs rapports comparés deux à deux ; en sorte que la proposition est toujours également démontrée, quelle que soit la grandeur de la ligne PQ, et par conséquent lors même que cette ligne seroit infiniment petite ; dans ce cas, la proposition aura des applications très utiles à la théorie des tangentes des courbes, considérées comme les prolongements des côtés élémentaires de ces mêmes courbes. Passons à quelques usages de ce théorême dans la résolution de quelques problêmes utiles dans la pratique.

PROBLÊME.

219. *Deux droites* AB, DE *inclinées l'une à l'autre, de maniere à ce qu'elles puissent se rencontrer, étant données de position, avec un point* F *aussi donné comme l'on voudra à l'égard de ces mêmes lignes ; (fig* 87*), mener par ce point une droite qui aille aboutir au même point de rencontre des deux premieres lignes ; quoique l'on ne puisse avoir le point où ces lignes doivent se couper.*

ANALYSE ET SOLUTION.

Il est visible que tout se réduit à considérer la droite DE, et la ligne qui doit passer par le point F, comme deux droites menées par les extrémités de quatre lignes, paralleles deux à deux et proportionnelles entre elles ; ce qui conduit à la solution suivante. Ayant pris un point B à

volonté sur la ligne AC, menez par le point A et ce dernier les lignes AD, BE paralleles entre elles, et terminées à l'une des lignes données de position; par le point A et le point donné F, on tirera AF à laquelle on menera par le point B une parallele indéfinie BL; sur cette derniere, on prendra une droite BG, quatrieme proportionnelle aux droites AD, BE et AF; le point G, ainsi déterminé avec le point F, donnera la position de la ligne AF, qui doit concourir au même point avec les droites AC, DE données de position. C. Q. F. T. et D.

OBSERVATION.

220. Dans la pratique de ce problême, afin que les lignes concourent plus rigoureusement au même point; il convient de prendre le point B sur la ligne donnée AC, le plus loin possible du point A, parceque la même erreur, commise dans la détermination de BG, devient d'autant moins sensible dans celle de la ligne FG, que le point B est plus éloigné du point A. Ce problême est d'un grand usage dans plusieurs opérations de géométrie pratique. Il est particulièrement utile dans la *gnomonique*, ou l'art de faire des çadrans, lorsque le centre du cadran, où doivent concourir les lignes horaires, se trouve fort éloigné, et même hors du plan sur lequel on doit tracer ces mêmes lignes. Il sert également dans la perspective, où il s'agit presque toujours de faire tendre des lignes à des points fixes, souvent fort éloignés, nommés points de *distance*, et points *accidentels* ou *évanouissants*. Enfin

on peut encore faire usage de ce problême pour percer dans les bois ou parcs des allées qui aillent concourir, avec d'autres déja tracées, à des objets déterminés, et qui font un point de vue intéressant.

Des points semblablement placés au-dedans ou au-dehors des polygones semblables.

DÉFINITIONS.

221. *Deux points* O, *o sont semblablement placés à l'égard de deux polygones semblables* ABCDEF, *abcdef* (*fig* 81, *pl.* V), *lorsque les distances* OA, OB, *oa, ob de ces mêmes points à deux côtés homologues ou correspondants* AB, *ab de ces mêmes polygones sont proportionnelles à ces mêmes côtés; c'est-à-dire si l'on a* cette suite de rapports égaux OA : OB : AB :: *oa* : *ob* : *ab*; ou, ce qui revient au même, *si les triangles* AOB, *aob, formés par les lignes menées des points ainsi déterminés aux extrémités des côtés correspondants, sont semblables.*

COROLLAIRE.

222. Il suit de cette définition que les sommets des angles correspondants de deux polygones semblables, sont eux-mêmes des points semblablement placés dans ces polygones.

THÉORÊME.

223. *Si par deux points* O, *o, semblablement placés au-dedans de deux polygones semblables* (*fig.* 81), *on mene des lignes droites à tous les angles correspondants de ces polygones, elles*

diviseront ces mêmes polygones en un même nombre de triangles semblables.

DÉMONSTRATION.

Supposant que les côtés AB, *ab* sont ceux qui ont servi à déterminer les points O, *o*, semblablement placés dans ces deux polygones semblables; par la construction même (n°. 221), les triangles AOB, *aob* seront semblables, puisque les trois côtés de l'un sont proportionnels aux trois côtés de l'autre; et par conséquent les angles ABO, *abo*, opposés à des côtés correspondants de ces triangles, sont égaux; donc, si on les retranche des angles ABC, *abc* aussi égaux, comme angles correspondants de deux polygones semblables, les angles restants OBC, *obc* seront égaux; mais on a OB : *ob* :: AB : *ab*, et par hypothese
AB : *ab* :: BC : *bc*; donc OB : *ob* :: BC : *bc*, c'est-à-dire que les angles OBC, *obc* égaux, comme on vient de le dire, sont compris entre côtés proportionnels; donc les triangles BOC, *boc* sont semblables (n°. 201) : on fera le même raisonnement sur chacun des triangles correspondants, dans lesquels on a décomposé les deux polygones semblables; d'où suit évidemment la vérité du théorême à démontrer. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

224. Donc, si par les angles correspondants quelconques A, *a* de deux polygones semblables, on mene à tous les autres angles des lignes

droites ; ces deux polygones se trouveront divisés par les mêmes lignes en un même nombre de triangles semblables, puisque l'on a vu que les sommets des angles correspondants de deux polygones semblables sont des points semblablement placés à l'égard de ces polygones.

COROLLAIRE II.

225. Puisque les triangles, dans lesquels on divise deux polygones semblables par des lignes menées de deux points semblablement placés au-dedans de ces polygones, sont semblables ; et que, dans les triangles semblables, les côtés homologues sont proportionnels ; la comparaison des côtés correspondants de tous ces triangles donnera pour deux polygones quelconques semblables, ces deux suites de proportionnelles, AO : OB : OC : OD : OE : OF : AB : BC : CD : DE : EF : FA :: *ao* : *ob* : *oc* : *od* : *oe* : *of* : *ab* : *bc* : *cd* : *de* : *ef* : *fa* ; et parceque dans deux suites de termes proportionnels, la somme de tant de termes que l'on voudra de la premiere, est à la somme d'un même nombre de termes correspondants de la seconde, comme un terme quelconque de la premiere suite est à son correspondant de la seconde ; on aura AB + BC + CD + DE + EF + FA : *ab* + *bc* + *cd* + *de* + *ef* + *fa* :: AO : *ao* :: BO : *bo* :: AB : *ab*, etc. ; c'est-à-dire que *les contours ou périmetres de deux polygones semblables sont entre eux, comme les lignes menées par des points semblablement placés à l'égard de ces polygones à des angles correspondants quelconques, ou*

comme les côtés correspondants de ces mêmes figures.

COROLLAIRE III.

226. Si les polygones sont réguliers, le théorême n'en sera pas moins vrai dans toutes ses parties, quel que soit le nombre des côtés de chaque polygone régulier; donc *les contours de deux polygones réguliers quelconques semblables sont comme les côtés de ces mêmes polygones; comme les diagonales correspondantes de ces polygones; en un mot, comme toutes les lignes tirées de la même maniere au-dedans de ces polygones*; ou enfin, *comme toutes les parties aliquotes semblables de ces mêmes lignes.*

COROLLAIRE IV.

227. Les cercles pouvant être considérés comme des polygones réguliers semblables d'un nombre infini de côtés; *leurs circonférences qui en sont les contours seront entre elles comme les rayons, comme les diametres, ou comme les cordes ou arcs d'un même nombre de degrés de ces mêmes cercles.* Il faut aussi entendre la même chose des courbes quelconques différentes du cercle qui termineroient de toutes parts des figures semblables.

PREMIER SCHOLIE.

228. Il est très à propos de remarquer que si l'on mene au-dedans ou au-dehors d'un polygone irrégulier quelconque des lignes paralleles à chacun des côtés de ce polygone, et à la même

distance de ces mêmes côtés, les figures qui en résulteront ne seront nullement semblables au polygone primitif. C'est une espece de paradoxe que j'ai vu bien des personnes disposées à regarder comme une absurdité; mais pour se convaincre de la vérité de cette proposition, il suffit d'observer que dans un tel polygone les côtés alentour des angles égaux à ceux du polygone primitif ne sont point proportionnels avec les côtés auxquels ils répondent dans ce même polygone. Cette exception n'a pas lieu dans les polygones réguliers.

SECOND SCHOLIE.

229. La théorie des figures semblables, des points semblablement placés au-dedans des polygones quelconques semblables, toute la théorie des lignes proportionnelles, ont un rapport direct et immédiat avec la levée des plans, avec la réduction de ces mêmes plans de grand en petit, ou de petit en grand, ainsi qu'avec la construction des cartes de toute espece, dans lesquelles tous les points qui en forment l'ensemble, comparés trois à trois de toutes les manieres possibles, forment des triangles semblables à ceux que l'on conçoit tracés sur le terrain par des lignes tirées aux points désignés sur ces mêmes cartes. Ainsi les commençants ne peuvent trop s'appliquer à saisir tout ce que nous venons d'exposer.

CHAPITRE VII.

Des rectangles faits sur les segments d'une même ligne; des lignes qui se coupent au-dedans ou au-dehors du cercle; des moyennes proportionnelles, et de la maniere de les construire; des quarrés établis sur les côtés des triangles quelconques rectangles ou non rectangles, comparés aux quarrés construits sur les côtés de ces triangles pris pour base; des quadrilateres inscrits au cercle.

AVERTISSEMENT.

230. LORSQUE nous aurons besoin de représenter le quarré fait sur une ligne quelconque AB, nous l'exprimerons également par $AB \times AB$ ou par $\overline{AB}^{2}$; le 2 supérieur marquant que la ligne AB doit être deux fois facteur pour former ce quarré. De même s'il est question d'une ligne composée de deux parties AB, BC, et dont il faut indiquer le quarré, nous l'exprimerons par $(AB+BC)^2$; il en seroit de même s'il s'agissoit du quarré de AB—BC que nous écririons ainsi $(AB-BC)^2$. Si la même ligne se trouvoit trois fois facteur; pour marquer le cube de cette ligne, ou celui de ses parties, nous l'indiquerons par les expressions suivantes $\overline{AB}^{3}$, $(AB\pm BC)^3$, et ainsi de suite.

THÉORÊME I.

231. *Si une ligne* AB (*fig.* 99) *est composée de deux parties* AG, GB; *le quarré de cette ligne entiere à l'égard des deux portions dans lesquelles elle est divisée, contiendra* 1°. *le quarré fait sur la premiere partie;* 2°. *deux rectangles égaux au produit de la premiere par la seconde;* 3°. *le quarré de la seconde partie.*

DÉMONSTRATION.

Ayant pris sur AD la ligne AE egale à AG, et tiré les droites EH, GI, paralleles aux côtés AB, AD du quarré ABCD; il est visible que la figure AGOE est le quarré fait sur la premiere partie AG; il n'est pas moins visible que les deux rectangles BGOH, DEOI sont chacun égaux au rectangle de AG par GB; et qu'enfin la figure CHOI, qui complette le quarré fait sur AB, est égale au quarré de GB, à cause des lignes égales BG, DE et des lignes OH, OI, qui leur sont paralleles, et comprises entre paralleles; et que de plus ces côtés égaux sont aussi perpendiculaires l'un à l'autre. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

232. Puisque les deux parties de la ligne AB peuvent représenter deux quantités quelconques, il s'ensuit que *le quarré d'une grandeur telle qu'elle puisse être, composée de deux parties, contiendra le quarré de la premiere, deux fois le produit de la premiere par la seconde, et le quarré de la seconde.* On auroit pu reconnoître

cette vérité sans le secours d'aucune figure, en multipliant la quantité AG + BG par elle-même, ce qui eût donné $\overline{AG}^2 + 2\,AG \times BG + \overline{BG}^2$.

THÉORÊME II.

233. *Si une ligne* AG *est la différence de deux lignes* AB, BG, *en sorte que l'on ait* AG = AB — BG; *le quarré de cette ligne, ainsi exprimée, vaudra le quarré de la ligne* AB, *moins deux fois le rectangle fait sur* AB *et sur* BG, *plus le quarré de la ligne* BG.

DÉMONSTRATION.

Il est visible que le quarré AGOE fait sur la ligne AG est égal au quarré ABCD fait sur la ligne AB, moins le rectangle GC égal au produit BC × BG ou AB × BG, moins le rectangle EOID; or, ce même rectangle est égal au rectangle EC, moins le quarré CHOI fait sur la ligne AG; ainsi le quarré AGOE vaut le quarré ABCD, moins deux fois le rectangle AB × BG, plus le quarré de BG, d'où suit évidemment la vérité du théorême. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

234. Donc, *si une quantité quelconque est la différence de deux quantités aussi quelconques;* le quarré de cette grandeur ainsi exprimée vaudra *le quarré de la premiere, moins deux fois le produit de la premiere par la seconde, plus le quarré de la seconde.* On pouvoit reconnoître cette vérité sans le secours d'aucune figure géométrique,

géométrique, en faisant le produit de AB — BG par cette même quantité, et l'on auroit trouvé (AB — BG) × (AB — BG) ou $(AB - BG)^2 = AB^2 - 2\,AB \times BG + BG^2$.

THÉORÈME III.

235. *La différence de deux quarrés quelconques* ABCD, OICH *est égale à un seul rectangle qui auroit pour côtés contigus la somme des côtés de ces quarrés et la différence des mêmes lignes* (*fig.* 99).

DÉMONSTRATION.

Il est visible que l'excès du quarré ABCD sur le quarré OICH, est égal au rectangle AGID; plus au rectangle BGOH; au lieu de ce dernier, ajoutons au premier le rectangle DIKL, égal au second, en prolongeant les lignes AD, GI en L et K, de maniere que l'on ait DL, IK chacune égale à BG; et tirant LK égale et parallele à la ligne AG. On voit alors que l'excès du quarré ABCD sur le quarré OICH, est égal au seul rectangle AGKL, dont le côté AL = AD + DL = AB + BG (par construction), et dont le côté AG est égal à AB — BG; donc la différence des quarrés ABCD, OICH = (AB + BG) × (AB — BG); ou ce qui revient au même, *la différence de deux quarrés quelconques est égale à un rectangle fait sur la somme des racines ou côtés de ces quarrés, par la différence des mêmes racines.* C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

236. *Donc, si une ligne droite* AB *(fig 92) est divisée en deux parties égales en* C *et en deux parties inégales en* D, *le rectangle des parties inégales* AD × BD *sera égal au quarré de la moitié de cette ligne, moins le quarré de la partie moyenne* CD, si le point D tombe entre les points A et B; ou *le même rectangle* AD × BD *sera égal au quarré de la ligne* CD, *moins le quarré fait sur la moitié de la ligne* AB *ainsi divisée;* car, dans le premier cas, on a $AD = AC + CD$, et $BD = CB - CD$, ou $AC - CD$; donc $AD \times DB = (AC + CD) \times (AC - CD) = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$, par le présent théorême; et dans le second cas, $AD = CD + CA$ et $BD = CD - CB = CD - CA$, à cause de $AC = CB$; donc $AD \times DB = (CD + CA) \times (CD - CA) = \overline{CD}^2 - \overline{CA}^2$. On pourroit reconnoître la vérité du dernier théorême et du corollaire sans aucune figure, en effectuant la multiplication des produits indiqués $(CA + CD) \times (CA - CD)$, ou $(CD + CA) \times (CD - CA)$: mais la proposition acquiert encore un degré d'évidence de plus par les considérations géométriques qui la mettent en quelque sorte sous les yeux.

COROLLAIRE II.

237. *Donc, si l'on a la différence de deux quarrés, on pourra toujours la regarder comme un produit fait de la somme des racines ou côtés*

de ces quarrés par la différence des mêmes racines; et réciproquement, *la somme de deux quantités quelconques, multipliée par la différence des mêmes quantités, donnera au produit la différence de leurs quarrés.*

THÉORÈME IV.

238. *Supposant toujours une ligne* AB, *divisée en deux également en* C, *et un point* D *sur cette même ligne pris où l'on voudra; je dis que la somme des quarrés* $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$ *des deux parties* AC *et* CD, *est égale à la demi-somme des quarrés faits sur la somme des racines* AC + CD, *et sur la différence* AC — CD *des mêmes racines.*

DÉMONSTRATION.

Par le théorême du (n°231), on aura $(AC+CD)^2 = \overline{AC}^2 + 2\,AC \times CD + \overline{CD}^2$, et par celui du (n°. 233), on a $(AC-CD)^2 = \overline{AC}^2 - 2\,AC \times CD + \overline{CD}^2$; donc en ajoutant ces deux quantités, et prenant la moitié de leur somme, on aura $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \frac{1}{2}(AC+CD)^2 + \frac{1}{2}(AC-CD)^2$. C. Q. F. D.

N. B. Ces théorêmes nous seront du plus grand usage par la suite, et donneront avec la plus grande facilité la démonstration d'un grand nombre de propositions qui font la base de toute la géométrie; ainsi les commençants ne peuvent trop s'appliquer à les retenir.

CHAPITRE VIII.

Des lignes qui se coupent au-dedans ou au-dehors du cercle; des moyennes proportionnelles et des différentes manieres de les construire.

THÉORÊME I.

239. *Si deux lignes droites* AB, MN *se coupent dans un point quelconque* O, *au-dedans ou au-dehors d'un cercle* (*fig.* 93 *et* 94), *elles s'y couperont en parties réciproquement proportionnelles; c'est-à-dire que les portions* AO *et* OB *de la premiere feront les extrêmes ou les moyens d'une proportion dont les parties* MO *et* ON *de la seconde seront les moyens ou les extrêmes, en sorte que l'on aura toujours* AO : OM :: ON : OB.

DÉMONSTRATION.

Soient tirées les cordes ponctuées AM, BN dans l'une ou dans l'autre figure : les triangles AOM, NOB seront semblables dans chacune; car l'angle A du premier triangle est égal à l'angle N du second, à cause que ces angles ont leur sommet dans la circonférence du même cercle, et sont appuyés sur un même arc (n°. 87); de plus les angles AOM, NOB sont égaux dans la *figure* 93, comme opposés au sommet, et formés par deux lignes droites; et ces mêmes angles n'en font qu'un seul commun aux deux

triangles dans la *figure* 94; donc ces triangles sont semblables (n°. 202), et à cause que les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels, en les comparant comme ils doivent l'être, on aura AO : OM :: ON : OB; c'est-à-dire que les droites AB, MN qu'on nomme *sécantes intérieures* ou *extérieures,* selon qu'elles se coupent au-dedans ou au-dehors du cercle, se divisent en parties réciproquement proportionnelles. C. Q. F. D.

Corollaire I.

240. Donc, si deux lignes se coupent au-dedans ou au-dehors d'un cercle en O, le rectangle AO × OB des parties de la premiere sera égal au rectangle MO × ON des parties de la seconde. Ce corollaire peut *servir et sert en effet à changer un rectangle dont les côtés sont donnés, en un autre qui lui soit égal en surface, et qui ait une base ou une hauteur donnée.*

Corollaire II.

241. Si l'une des sécantes MN (*fig.* 95) est divisée en deux parties égales en O, ce qui donne OM = ON; la proportion, énoncée au théorême, devient AO : OM :: OM : OB, d'où l'on tire $\overline{OM}^2 = AO \times OB$; et par conséquent la ligne OM est moyenne proportionnelle entre les parties AO et OB de la ligne AB.

Pareillement, si l'on conçoit que la sécante OMN de la *figure* 94 tourne sur le point O, comme sur une charniere, en s'écartant de sa premiere position, à droite ou à gauche il n'im-

porte, de maniere que les points M, N tendent à se réunir pour n'en faire qu'un seul, ce qui arrive lorsque cette même sécante devient la tangente OM (*fig.* 96), on aura encore AO : OM :: OM : OB, c'est-à-dire que si d'un point O quelconque au-dehors d'une circonférence aussi quelconque, on mene une sécante OBA et une tangente OM, cette derniere sera moyenne proportionnelle entre la sécante entiere OA, et sa partie extérieure OB.

Ce corollaire peut aussi se démontrer directement en menant la corde BM; car les triangles AOM et MOB sont semblables, ayant l'angle O commun, et les angles OAM et BMO aussi égaux comme ayant leur sommet dans une même circonférence, et étant appuyés sur le même arc BM, dont ils ont la moitié pour mesure; donc, en comparant les côtés homologues, on aura AO : OM :: OM : OB.

COROLLAIRE III.

242. Donc, les tangentes OM, O*m*, menées d'un même point à la circonférence d'un même cercle, sont égales; puisqu'en tirant une sécante quelconque OBA, chaque tangente sera moyenne proportionnelle entre les mêmes parties OA, OB de la même sécante, ce qui donne $\overline{OM}^2$ ou $\overline{Om}^2 = AO \times OB$, d'où il suit que OM = O*m*.

COROLLAIRE IV.

243. Si chacune des sécantes intérieures au cercle OB, MN est divisée en deux également

aux points F et G, on aura (par le n°. 236) $AO \times OB = \overline{AF}^2 - \overline{FO}^2$, et $MO \times ON = \overline{GM}^2 - \overline{GO}^2$ (*fig.* 93), ou par le même (n°. 236) $AO \times OB = \overline{FO}^2 - \overline{AF}^2$ et $MO \times ON = \overline{GO}^2 - \overline{GM}^2$ (*fig.* 94); donc si deux droites quelconques AB, MN se coupent en un point O, au-dedans ou au-dehors du cercle, les produits des parties AO, OB, MO et ON de chacune pourront être mis sous cette forme, et donner cette nouvelle égalité $\overline{AF}^2 - \overline{FO}^2 = \overline{GM}^2 - \overline{GO}^2$ ou $\overline{FO}^2 - \overline{AF}^2 = \overline{GO}^2 - \overline{GM}^2$, après avoir divisé les parties intérieures de ces mêmes sécantes en deux également aux points F et G.

Corollaire V.

244. Donc, si plusieurs lignes droites paralleles (*fig.* 97), ou non paralleles, MN, *mn*, $m'n'$ sont coupées par une même droite *ab*, en différents points O, *o*, o' au-dedans ou au-dehors d'une même circonférence; on aura cette suite d'égalités $aO \times Ob = MO \times ON$; $ao \times ob = mo \times on$; $ao' \times o'b = m'o' \times o'n'$; ou, ce qui revient au même en mettant ces égalités sous la forme de rapports égaux, $MO \times ON : mo \times on :: m'o' \times o'n' :: aO \times Ob : ao \times ob : ao' \times o'b$.

Corollaire VI.

245. Si toutes les lignes du corollaire précédent sont supposées paralleles entre elles, et perpendiculaires à un même diametre AB, qui les

coupera toutes par conséquent en deux parties égales aux points P, p, p'; on aura $\overline{MP}^2 = AP \times PB$, $\overline{mp}^2 = Ap \times pB$, $\overline{m'p'}^2 = Ap' \times p'B$; d'où suit cette vérité importante et remarquable que, si de tous les points de la circonférence d'un cercle on abaisse des perpendiculaires MP, mp, $m'p'$ sur un même diametre de ce cercle, lesdites perpendiculaires (que l'on a nommées *ordonnées* au diametre, en latin *ordinatim applicatae*), seront chacune moyenne proportionnelle entre les parties AP, PB, ou Ap, pB, Ap', $p'B$, dans lesquelles elles divisent ce même diametre; on a nommé toutes les lignes comme AP, PB, Ap, pB, etc. *abcisses* ou *coupées* du diametre; donc, *dans un cercle, toute ordonnée au diametre est moyenne proportionnelle entre ses abscisses.*

COROLLAIRE VII.

246. C'est sur le corollaire précédent qu'est fondée l'équation algébrique du cercle; c'est-à-dire une expression de l'une de ses principales propriétés de laquelle on peut déduire toutes les autres propriétés de cette courbe, même en abandonnant la figure du cercle; idée heureuse appliquée spécialement par *Descartes* à toutes les courbes, et qui a reculé si loin les bornes de nos connoissances.

PROBLÊME I.

247. *Trouver l'équation algébrique du cercle.*

SOLUTION.

Soit un diametre quelconque de ce cercle $= 2a$, une portion quelconque AP, ou Ap ou Ap $= x$, l'autre portion PB, pB, p'B sera pour chacune $2a - x$, nommant de plus chaque ordonnée PM, pm, pm', y, on aura $x : y :: y : 2a - x$; d'où l'on tire $yy = 2ax - xx$. Cette expression est ce que les géometres appellent l'équation algébrique du cercle. C. Q. F. D.

COROLLAIRE VIII.

248. Si le diametre AB est mesuré sur une échelle de parties égales, telles par exemple que le rayon en contienne 1000 ou 10000, lorsque l'on connoîtra de plus sur la même échelle la valeur des lignes AP, PB, ou Ap, pB, etc. en mettant ces valeurs numériques dans l'équation au cercle, on en tirera la valeur de chaque ordonnée correspondante, en tirant la racine de l'expression $2ax - xx$, ainsi changée par la substitution des valeurs numériques de chaque abcisse, désignée par x; de plus à cause que ces mêmes racines peuvent être prises tant positives que négatives, c'est-à-dire au-dessus comme au-dessous du même diametre; on voit par cette seule équation que tout cercle est divisé en deux parties égales et semblables par un diametre quelconque.

COROLLAIRE IX.

249. Supposant toujours les droites MN, mn, $m'n'$ perpendiculaires au diametre AB (*fig.* 97),

qui les coupe toutes en deux également, on aura $\overline{PM}^2 = AP \times PB$ ou $\overline{PM}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CP}^2$ (par le n°. 236), et de même $\overline{pm}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{cp}^2$, etc. puisque le diametre est divisé en deux parties égales en C, et en deux parties inégales aux points P, p, p'; donc, si l'on ajoute à chaque membre de l'égalité la même quantité $\overline{CP}^2$ ou $\overline{Cp}^2$ ou $\overline{Cp'}^2$, on aura $\overline{PM}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{CA}^2$, ou $\overline{pm}^2 + \overline{Cp}^2 = \overline{CA}^2$, et ainsi de suite; d'où l'on déduit une démonstration des plus simples de la fameuse 47ème proposition *d'Euclide*, qui est que *dans tout triangle rectangle*, tel que CPM, ou Cpm, ou C$p'm'$, le *quarré du côté* CM *opposé à l'angle droit, et que l'on nomme* hypoténuse *vaut à lui seul les quarrés des deux autres côtés.* Car à cause des rayons CM, Cm, Cm' tous égaux au rayon CA, on aura $\overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{CM}^2$, $\overline{Cp}^2 + \overline{pm}^2 = \overline{Cm}^2$, $\overline{Cp'}^2 + \overline{p'm'}^2 = \overline{Cm'}^2$; en substituant ces rayons dans les égalités trouvées au commencement du corollaire présent.

PREMIER SCHOLIE.

250. Les anciens, et *Diophante* en particulier, se sont beaucoup occupés de la recherche des triangles rectangles en nombres. Les modernes ont aussi beaucoup ajouté aux découvertes des anciens, et nous ont donné plusieurs suites infinies de nombres entiers ou fractionnaires,

tels que le quarré du plus grand est égal à la somme des quarrés des deux autres, ce qui constitue l'essence d'un triangle rectangle. M. *Schooten*, célebre commentateur de Descartes, a donné un chapitre très curieux sur les triangles rectangles en nombres rationels. Voyez la page 404 de son livre, intitulé *Exercitationes mathematicae*. Sans m'étendre trop sur cette matiere, je donnerai ici une méthode qui, dans sa généralité, renferme toutes les autres. La voici :

Si l'on a deux quarrés quelconques, leur somme, leur différence, et le double produit de leurs racines feront toujours un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est la somme de ces mêmes quarrés. En effet, soient a^2 et b^2 ces mêmes quarrés, leur somme est $a^2 + b^2$, leur différence est $a^2 - b^2$, et le double produit de leurs racines est $2ab$. Or $(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$, et le quarré de $a^2 - b^2$ est $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$, qui, joint avec $4a^2b^2$, quarré de $2ab$, donne une somme égale au premier quarré. Si les nombres a et b sont 2 et 1, les trois côtés du triangle rectangle sont 5, 4 et 3, qui sont les plus simples possibles en nombre, et dont on fait usage pour construire avec la plus grande précision un angle droit sur le terrain.

SECOND SCHOLIE.

251. Si le triangle rectangle est isoscele, et si l'on désigne par 1 chacun de ses côtés; à cause que le quarré du côté opposé à l'angle droit est égal au quarré des deux autres côtés, en tirant la diagonale AD (*fig.* 99), on aura $AD^2 = 2$;

donc AD $= \sqrt{2}$. D'un autre côté, l'on a vu en arithmétique que le nombre 2 n'étant pas un quarré parfait, il est impossible d'en avoir la racine en nombres exactement, en sorte que la diagonale du quarré ne peut avoir aucune mesure commune avec le côté du quarré; et pour cette raison, on dit que cette ligne est *incommensurable* avec l'autre. Tous les auteurs élémentaires ont regardé cette vérité comme une espece de paradoxe, qui devient ici d'autant plus étonnant que cette diagonale est la valeur précise et rigoureuse de la racine du nombre 2, qu'il est impossible d'exprimer en arithmétique. Nous remarquerons de plus que, par le moyen du cercle, il est également possible d'assigner rigoureusement la racine quarrée de tous les nombres qui ne sont pas des quarrés parfaits. On auroit dû chercher, ce me semble, pourquoi la géométrie donne ainsi avec la plus grande rigueur la valeur des quantités que l'arithmétique ne peut jamais représenter qu'imparfaitement, et par des approximations toujours indéfinies.

Pour peu qu'on y fasse attention, on verra que cette différence vient essentiellement de celle des manieres de procéder en arithmétique et en géométrie dans la détermination des quantités connues sous le nom d'incommensurables. En effet l'arithmétique ne pouvant employer que des subdivisions de l'unité principale, toujours soumises à une même loi de numération, dans laquelle il n'y a qu'un certain nombre de termes qui puissent être des quarrés parfaits; s'il lui étoit possible d'assigner une racine exacte

et finie de ces sortes de nombres, il y auroit nécessairement contradiction, puisque le nombre, qui n'est pas un quarré parfait, en seroit un en même temps, en tant qu'il auroit une racine exacte.

La géométrie, au contraire, ne suppose aucun système de numération, aucune subdivision de l'unité principale; c'est par des mouvements angulaires, ou par des courbes, qu'elle détermine ces sortes de quantités. Il n'est donc pas surprenant que la géométrie arrive par cette route à ce que l'arithmétique n'auroit pu donner sans contradiction. Il paroît que cette considération avoit donné beaucoup de goût aux anciens pour les solutions géométriques, avec la regle et le compas; malgré cela il est presque toujours vrai de dire que l'arithmétique avec ses imperfections nécessaires et inevitables, est cependant préférable à la géométrie, parceque l'on peut diminuer les erreurs à l'indéfini, et les rendre absolument inappréciables dans la pratique.

Problême II.

252. *Entre deux lignes données* M, N *(fig.* 100 *et* 101 *), trouver une moyenne géométrique.*

Solution.

Puisque toute ordonnée au diametre est moyenne proportionnelle entre les deux parties dans lesquelles elle divise le diametre (n°. 245), et que toute tangente l'est pareillement entre une sécante entiere quelconque et sa partie extérieure (n° 241), il est visible que chacune de ces proprié-

tés donne un moyen de résoudre le problême; ce qui fournit les deux constructions suivantes.

PREMIERE CONSTRUCTION.

Sur une ligne indéfinie quelconque, je prends les parties AD et DB (*fig.* 100), respectivement égales aux lignes données M et N; sur leur somme comme diametre, je décris une demi-circonférence ou une circonférence entiere; et par le point D, élevant au diametre la perpendiculaire MD*m*, terminée en deux points M, *m* de la même circonférence, chaque moitié MD, ou *m*D de cette ligne, sera la moyenne proportionnelle cherchée.

SECONDE CONSTRUCTION.

Ayant pris sur une droite AB, égale à la plus grande des deux lignes données M, N, une partie AD égale à la plus petite (*fig.* 101); sur la différence BD de ces deux lignes, comme diametre, je décrirai une circonférence entiere à laquelle je menerai du point A une tangente AF qui sera encore la moyenne proportionnelle demandée entre les deux lignes données M, N; comme cela suit évidemment de ce qui a été démontré sur la *figure* 96 (n°. 241). C. Q. F. T. et D.

SCHOLIE.

253. Il n'est pas nécessaire que la ligne AB, égale à la somme des lignes données M, N, soit le diametre du cercle qui doit donner la moyenne proportionnelle demandée; car ayant fait les parties AO et OB de la ligne AB (*fig.* 95), respec-

tivement égales aux lignes données N et M; sur le milieu G de la ligne AB, élevez une perpendiculaire indéfinie LGI: tout point C, pris dans cette perpendiculaire, pourroit être le centre d'un cercle qui, passant par les points A et B, satisfera à la question. Car, si du point C on mene au point O la droite COK, à laquelle on éleve une perpendiculaire MON, cette ligne sera divisée en deux également en O, et chacune de ses moitiés OM, ON, sera la moyenne proportionnelle demandée.

De même dans la *figure* 96, ayant pris sur une ligne AO la partie OB, égale à la plus petite des deux lignes données M, N; sur le milieu G de la ligne AB, on élevera une perpendiculaire indéfinie LGI; alors tout point C pris dans cette perpendiculaire pourra être le centre d'un cercle dont la circonférence passera par les points A et B, et à laquelle les tangentes OM, O*m*, menées du point donné O, seront chacune la moyenne proportionnelle demandée.

Et parceque les points C dans l'une et dans l'autre figure sont en nombre infini, on a donc deux suites infinies de moyens d'assigner entre deux lignes données une moyenne proportionnelle; et par conséquent d'assigner le côté d'un quarré égal en surface à un rectangle dont les côtés sont donnés; lors même qu'ils sont exprimés en nombres dont le produit n'est pas un quarré, dont on voit cependant que la géométrie assignera toujours la racine exacte et rigoureuse: ce qui a fait dire à un auteur justement estimé, *qu'il n'y a pas d'incommensurables en*

géométrie; il falloit ajouter, pour que la proposition fût exacte, *dont on ne puisse assigner la valeur précise.* Nous aurons occasion de trouver encore nombre de moyens différents de résoudre le même problême, s'il pouvoit en être besoin.

CHAPITRE IX.

Des quarrés construits sur les côtés d'un triangle quelconque obtusangle ou acutangle.

254. *Soit un diamètre* AB, *et une ligne droite* Dd, *qui lui soit perpendiculaire* (*fig.* 102), *et soient menées les cordes* AD, BD, *ou* Ad, Bd; *si d'un point* K *ou* k *quelconque pris sur cette même ligne au-dedans ou au-dehors du cercle, on mene les droites* AKL, BKG, *ou les droites* A*lk et* B*gk; je dis que chaque corde, comme* AD, BD, *sera moyenne proportionnelle entre les lignes* AL, AK, *ou* BG *et* BK, *qui lui répondent; et que chaque corde* Ad, Bd *sera pareillement moyenne proportionnelle entre les droites* A*k*, A*l*; B*k*, B*g*, *qui lui répondent.*

DÉMONSTRATION.

Soient encore tirées les cordes DL, DG, *dl*, *dg;* cela posé, les triangles ALD, ADK seront semblables, ayant un angle commun en A, et de plus les angles ALD, ADK égaux, comme étant à la circonférence du même cercle, et appuyés sur des arcs égaux AD, A*d*, dont ils ont

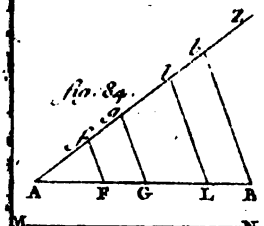


fig. 84.
Z
A F G L B
M N

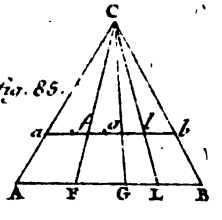
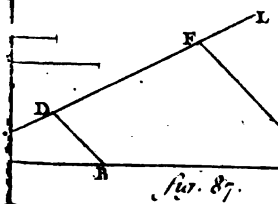


fig. 85.
C
a b
A F G L B
M N


F L
D
B C G
fig. 87.

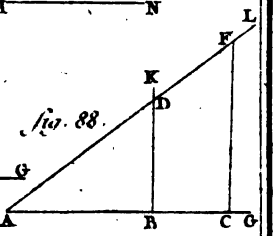
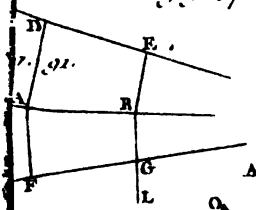
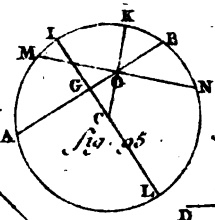
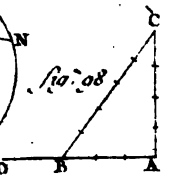
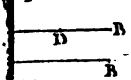


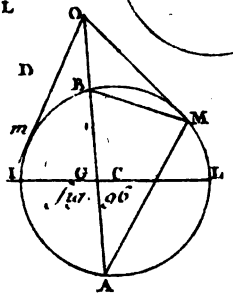
fig. 88.
F L
K D
A B C G

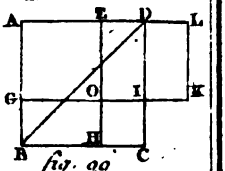

D E
A B
F G L

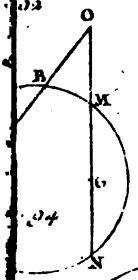

I K B
M G N
A L
fig. 95

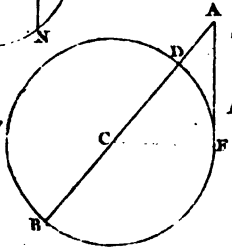

C
D B A
fig. 98

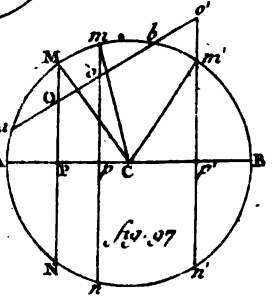

D B
D B


O
D B M
m
I G C L
A
fig. 96


A E D L
G O I K
B H C
fig. 90


O
B M
G
N


A
D
C
F
B


o'
m b
M m'
a
A B
F C o'
N n n'
fig. 97

ont la moitié pour mesure ; comparant les côtés homologues, on aura AL : AD :: AD : AK ; on fera voir de même que les triangles BGD et BDK sont également semblables, et par les mêmes raisons ; et la comparaison des côtés opposés aux angles égaux donnera BG : BD :: BD : BK, c'est-à-dire que chaque corde AD, BD est moyenne proportionnelle entre les parties AL, AK ; BG, BK des lignes qui lui répondent. C. Q. F. 1° D.

Si le point *k* est au-dehors du cercle, on verra encore que les triangles A*kd*, A*dl* sont semblables ; car ils ont un angle commun en A ; et de plus les angles A*kd*, A*dl* sont aussi égaux, ayant chacun pour mesure la demi-différence des arcs AD et *dl*, ou A*d* et *dl* (n°. 86) ; donc, la comparaison des côtés correspondants donnera A*k* : A*d* :: A*d* :: A*l* ; enfin on démontrera de la même maniere que les triangles B*kd*, B*dg* sont aussi semblables, et que l'on a B*k* : B*d* :: B*d* : B*g* ; d'où suit la vérité de la seconde partie du théorême. C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE I.

255. Il suit du théorême que supposant toutes choses comme dans son énoncé, on aura $\overline{AD}^2 = AL \times AK$, et $\overline{BD}^2 = BG \times BK$; ainsi que $\overline{Ad}^2 = Al \times Ak$ et $\overline{Bd}^2 = Bg \times Bk$. Si, de plus, on suppose que le point K, qui peut être pris par-tout où l'on voudra sur la ligne D*d*, tombe au point F, où cette ligne coupe le diametre AB ; on aura

les triangles ABD et ADF au lieu des triangles ALD et ADK, mais rectangles et toujours semblables. On aura de même les triangles BAD et BDF, au lieu des triangles BGD et BDK, mais aussi toujours semblables et rectangles en D et en F. Les premiers donnent AB : AD :: AD : AF, et les seconds AB : BD :: BD : BF, d'où l'on déduira les vérités suivantes qui sont d'un usage continuel dans la géométrie théorique et pratique.

Si de l'angle droit d'un triangle quelconque ADB *rectangle en* D, *l'on abaisse sur sa base* AB *une perpendiculaire* BD, 1°. *cette ligne partagera le triangle en deux triangles* AFD, DBF, *chacun semblable au grand triangle*, à raison d'un angle droit et d'un angle commun avec ce même triangle, *et par conséquent semblables entre eux;* 2°. *chaque côté de l'angle droit* ADB *sera moyen proportionnel entre l'hypoténuse entiere* AB, *et la partie* AF *ou* BF *qui lui répond;* 3°. *la perpendiculaire* DF *elle-même sera moyenne proportionnelle entre les deux parties dans lesquelles elle divise le diametre*, comme on l'a déja démontré, et d'où nous avons déduit *l'équation au cercle;* d'où l'on voit encore comment on pourroit assigner une moyenne proportionnelle entre deux lignes données au moyen des cordes d'un cercle et de son diametre.

COROLLAIRE II.

256. A cause des proportions continues AB : AD :: AD : AF, et AB : BD :: BD : BF, on aura $AB \times AF = \overline{AD}^2 = AB \times BF = \overline{BD}^2$; ajoutant les

premiers et seconds membres de ces égalités, on aura $AB \times AF + AB \times BF = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$; mais $AB \times AF + AB \times BF = AB \times (AF + FB) = AB \times AB = \overline{AB}^2$; donc $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$; nouvelle démonstration de la 47me proposition d'*Euclide*.

COROLLAIRE III.

257. Puisque, *dans tout triangle rectangle, le quarré, fait sur sa base, ou sur l'hypoténuse, vaut à lui seul les quarrés des deux autres côtés;* il suit que si dans un triangle de cette espece on connoît deux côtés quelconques comme l'on voudra, on pourra toujours connoître le troisieme côté par l'extraction d'une racine quarrée; car, puisque $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$, en retranchant de chaque membre $\overline{AD}^2$ ou $\overline{BD}^2$, on aura $\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2$, et $\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$. Donc, en tirant les racines quarrées de chaque membre de ces égalités, on aura $AB = \sqrt{(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2)}$, $BD = \sqrt{(\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2)}$ et $AD = \sqrt{(\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2)}$; c'est-à-dire que, *par le moyen d'un triangle rectangle, on pourra toujours assigner le côté d'un quarré égal à la somme ou à la différence de deux quarrés donnés.* On pourroit également construire par le triangle rectangle d'autres expressions plus compliquées, comme celles-ci $\sqrt{(\overline{AB}^2 + AD \times DF)}$ ou $\sqrt{(AB \times AG \pm CD \times DF)}$, en changeant d'abord chaque rectangle en un quarré qui lui

soit égal en surface par les moyennes proportionnelles. Cette théorie fait la base de la construction des quantités radicales par la géométrie, et le principe d'une grande partie de l'application de l'algebre à la géométrie.

COROLLAIRE IV.

258. Puisque nous ayons trouvé $\overline{AB}^2 = AB \times AB$; $\overline{AD}^2 = AB \times AF$, et $\overline{BD}^2 = AB \times BF$; il s'ensuit que si l'on met ces égalités sous la forme des rapports, on aura $\overline{AB}^2 : \overline{AD}^2 : \overline{BD}^2 :: AB \times AB : AB \times AF : AB \times BF$, ou en divisant ces derniers termes par le facteur commun AB, $::$ AB : AF : BF; d'où il suit que les quarrés $\overline{AB}^2$, $\overline{AD}^2$ et $\overline{BD}^2$ ont entre eux les mêmes rapports que les lignes AB, AF et BF; et réciproquement que ces mêmes lignes sont entre elles comme les quarrés qui leur répondent; et de plus, parceque l'on a AB = AF + FB; qu'on aura aussi $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$, troisieme démonstration de la 47me. On fera usage de ce corollaire dans la théorie des figures semblables, pour déterminer les lignes homologues des figures semblables à d'autres, et qui aient avec elles des rapports donnés; à quoi l'on doit rapporter la multiplication, et la division de ces figures.

COROLLAIRE V.

259. Puisque l'on a toujours $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 +$,

$\overline{BD}^2 = \overline{Ad}^2 + \overline{Bd}^2$, et que d'ailleurs, par le théorême présent, on a $\overline{AD}^2 = AL \times AK$ et $\overline{BD}^2 = BG \times BK$, il s'ensuit que l'on aura $\overline{AB}^2 = AL \times AK + BG \times BK$; mais $AL = AK + KL$, et $BG = BK + KG$, mettant ces valeurs dans les produits $AL \times AK$, $BG \times BK$; et faisant les multiplications indiquées, on aura $\overline{AB}^2 = \overline{AK}^2 + AK \times KL + \overline{BK}^2 + BK \times KG$; ou $\overline{AB}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 + 2AK \times KL$, ou $+ 2BK \times KG$, à cause que les lignes AL, BG se coupent en parties réciproques (n° 239). Or, le triangle AKB, ayant son sommet K au-dessous du sommet D de l'angle droit D du triangle rectangle ADB, est un triangle obtusangle, dont les côtés sont AK et BK; d'où suit cette propriété remarquable : *Dans un triangle obtusangle quelconque, le quarré du côté opposé à l'angle obtus vaut à lui seul les quarrés des deux côtés de l'angle obtus, plus deux fois le produit de l'un quelconque de ces côtés par la distance du sommet au point où tombe la perpendiculaire abaissée de l'angle opposé à ce côté.* Car les lignes AG, BL sont visiblement des perpendiculaires abaissées des angles A et B sur les côtés opposés BK et AK de l'angle obtus AKB; à cause que ces angles AGB, ALB ont leur sommet dans la demi-circonférence, et sont appuyés sur le diametre.

COROLLAIRE VI.

260. Pareillement on a $Al = Ak + kl$, et $Bg = Bk - kg$: ainsi substituant ces valeurs dans l'équation $\overline{AB}^2 = \overline{Ad}^2 + \overline{Bd}^2 = Ak \times kl + B\kappa \times kg$, et faisant les multiplications indiquées, on aura $\overline{AB}^2 = \overline{Ak}^2 + \overline{Bk}^2 - AK \times \kappa l - BK \times Kg = \overline{Ak}^2 + \overline{B\kappa}^2 - 2\,A\kappa \times kl$, ou $-2\,B\kappa \times \kappa g$; et si l'on fait attention que le triangle $A\kappa B$ est nécessairement acutangle en κ, il s'ensuit que, *dans tout triangle acutangle, le quarré du côté opposé à l'angle aigu vaut à lui seul les quarrés des deux autres côtés, moins deux fois le produit d'un des côtés de ce même angle aigu par la distance du sommet au point où tombe la perpendiculaire abaissée de l'angle opposé à ce côté.* Car il est évident que les lignes Ag, Bl sont des perpendiculaires abaissées des angles opposés aux côtés Bk et Ak, à cause des angles AgB, AlB qui ont leur sommet à la circonférence, et qui sont appuyés sur le diametre AB.

COROLLAIRE VII.

261. Donc, si dans un triangle quelconque BAC, obtusangle ou acutangle (*fig.* 103), on connoît chacun des trois côtés, il sera facile d'avoir les lignes AF et BF, ainsi que les lignes AD, CD, que l'on nomme les *segments* des côtés AB, AC, déterminés par les perpendiculaires abaissées des angles opposés à ces côtés; car de l'équation

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB \times AF = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AC \times AD$, pour le triangle BAC supposé obtusangle en A, l'on en tire d'abord $AF = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}{2AB}$ et $AD = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}{2AC}$. Si l'on ajoute les côtés AB, AC, respectivement aux segments AF, AD ainsi exprimés; on aura $BF = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2AB}$ et $CD = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{2AC}$, pour les valeurs des segments BF et CD dans le triangle obtusangle BAC. De même au triangle acutangle BAC, à cause de l'équation $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB \times AF = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \times AD$, on aura d'abord $AF = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2AB}$ et $AD = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2AC}$; et si l'on ôte ces valeurs des segments AF, AD respectivement des côtés AB, AC auxquels ils appartiennent, on aura $BF = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2AB}$ et $CD = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2AC}$.

COROLLAIRE VIII.

262. Puisque dans les triangles BDA et CFA, rectangles l'un en D, l'autre en F, on a, par la 47me d'*Euclide*, $\overline{BA}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$ et $\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{CF}^2$; il s'ensuit que l'on aura $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$ et $\overline{CF}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AF}^2$. Et parceque l'on vient d'expri-

mer les segments AD, AF par les seuls côtés du triangle BAC; il est évident que la connoissance des mêmes côtés suffit pour avoir la perpendiculaire. Ainsi au triangle obtusangle BAC, on auroit $\overline{CF}^2 = \overline{AC}^2 - \left(\frac{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}{2\,AB}\right)^2 = \overline{AC}^2 - \left(\frac{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}{4\,AB}\right)^2$; d'où l'on tire $4\,\overline{AB}^2 \times \overline{CF}^2 = 4\,\overline{AB}^2 \times \overline{AC}^2 - (\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2)^2$.

COROLLAIRE IX.

263. Puisque (n°. 144) tout triangle est égal au produit de sa base par la moitié de sa hauteur, et que $4\,\overline{AB}^2 \times \overline{CF}^2$ est seize fois plus grand que $\frac{\overline{AB}^2 \times \overline{CF}^2}{4}$, quarré de la surface du triangle BAC, il s'ensuit que l'aire du même triangle sera exprimée par $\frac{1}{4}\sqrt{4\overline{AB}^2 \times \overline{AC}^2 - (\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2)^2}$. Or, la quantité qui est ici sous le radical est la différence de deux quarrés; elle est donc égale à la somme des racines de ces quarrés, multipliée par la différence des racines des mêmes quarrés (n°. 235); donc on aura BAC $= \frac{1}{4}\sqrt{((2\,AB \times AC + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2) \times (2\,AB \times AC - \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2))}$ que je puis écrire ainsi, $\frac{1}{4}\sqrt{((\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 + 2\,AB \times AC) \times (\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB \times AC - \overline{BC}^2))}$. Or, ces deux facteurs ainsi exprimés sont encore

chacun la différence de deux quarrés, et par conséquent égaux aux produits de la somme des racines de ces quarrés par la différence des racines des mêmes quarrés. En effet, le second facteur est évidemment le quarré de (AB+AC), moins le quarré de BC, et le premier facteur est la différence du quarré de BC, à celui de (AB—AC); donc on pourra encore décomposer les facteurs dans les deux, dont ils sont les produits par le (n° 235), et l'on aura $BAC = \frac{1}{4}\sqrt{((BC+AB-AC)\times(BC+AC-AB)\times(AB+AC+BC)\times(AB+AC-BC).}$ Si l'on fait passer le 4 sous le dénominateur, il faudra l'élever au quarré, ou, ce qui revient au même, diviser chacun des facteurs trouvés par 2, ce qui donnera $BAC = \sqrt{(\frac{AB+AC+BC}{2})\times(\frac{AB+AC-BC}{2})\times(\frac{BC+AB-AC}{2})\times(\frac{BC+AC-AB}{2})}$. Enfin, parceque $\frac{AB+AC-BC}{2} = \frac{AB+AC+BC}{2} - BC$, et que de même $\frac{BC+AB-AC}{2}$ et $\frac{BC+AC-AB}{2}$ sont respectivement égaux à ces nouvelles expressions $\frac{BC+AB+AC}{2} - AC$ et $\frac{BC+AB+AC}{2} - AB$; il s'ensuit qu'en substituant ces valeurs dans l'expression générale de l'aire d'un triangle quelconque BAC, l'on pourra établir ce théorême infiniment général; savoir que *la surface d'un triangle quelconque obtusangle ou acutangle est égale à la racine quarrée d'un produit de quatre dimensions, fait de la demi-somme des trois côtés du triangle par les trois différences de*

chaque côté à la demi-somme. Nous aurons occasion de donner une autre démonstration du même théorême appuyée sur des considérations purement et absolument géométriques.

COROLLAIRE X.

264. Donc, dans tout parallélogramme, comme ABCD (*fig.* 104), la somme des quarrés des diagonales équivaut à celle des quarrés des quatre côtés de ce même parallélogramme; car au triangle obtusangle ABC, on aura $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times BF$ (n°. 263), et au triangle acutangle BAD, on aura $\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB \times AG$; ainsi, en ajoutant les premiers et seconds membres de ces égalités, on aura $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2\,\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = 2\,\overline{AB}^2 + 2\,\overline{BC}^2$; à cause que les produits $2\,AB \times BF$ et $2\,AB \times AG$, l'un positif et l'autre négatif, se détruisent à raison des lignes égales AG, BF. Si le parallélogramme est rectangle, les diagonales seront égales, et l'on retombe encore dans la 47me *d'Euclide.*

SCHOLIE.

265. Nous pourrions encore déduire de ce théorême et de ses corollaires de nouvelles conséquences; mais il nous suffit, quant à présent, d'avoir montré comment on peut tirer d'une seule proposition la plus grande partie des vérités les plus importantes de la géométrie élémentaire.

THÉORÈME II.

266. *Dans tout quadrilatere inscrit au cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés du même parallélogramme.*

DÉMONSTRATION.

Au parallélogramme ABCD (*fig.* 105), dont AC et BD sont les diagonales, soit tirée la ligne CF, qui fasse l'angle DCF égal à l'angle ACB; les triangles ABC, DFC seront semblables, et donneront AB : AC :: DF : DC; donc, AB × DC = AC × DF; pareillement les triangles BFC et ADC seront aussi semblables à cause des angles égaux CBF, CAD appuyés sur le même arc DC; et que si des angles ACB, DCF égaux par construction, on ôte le même angle ACF, il viendra BCF = DCA; donc, en comparant les côtés homologues, on aura BC : BF :: AC : AD; donc BC × AD = BF × AC, et ajoutant ensemble les premiers et seconds membres de ces égalités, on aura BC × AD + AB × DC = BF × AC + DF × AC = AC × (BF + FD) = AC × BD; d'où il suit que le produit des deux diagonales d'un parallélogramme, inscrit au cercle, est égal à la somme des produits des côtés opposés du même parallélogramme. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

267. Si le quadrilatère devient un parallélogramme rectangle, les deux diagonales sont égales, ainsi que les côtés opposés, ce qui donne $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$; nouvelle et derniere démonstration de la 47me proposition *d'Euclide.*

COROLLAIRE II.

268. Si l'on compare ensemble les triangles BGC et AGD semblables, ainsi que les triangles AGB et DGC, puisqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun, on aura les deux proportions suivantes BC : AD :: BG : AG, et AB : DC :: AG : DG; en les multipliant par ordre, on aura BC × AB : AD × DC :: BG : DG; on fera voir de même que BC × CD :: AB × AD :: GG : AG; d'où il suit que, *dans tout quadrilatere inscrit au cercle, les diagonales se coupent mutuellement en parties proportionnelles aux produits des côtés correspondants aux portions de ces mêmes diagonales.*

CHAPITRE X.

Des polygones réguliers inscrits au cercle, et qui peuvent se décrire géométriquement.

269. LA théorie des polygones réguliers, inscrits ou circonscrits au cercle, seroit en général peu intéressante dans la géométrie pratique, vu que ceux que l'on peut être dans le cas d'employer, sont en très petit nombre et d'un petit nombre de côtés; mais, comme plus le polygone inscrit ou circonscrit au cercle a de côtés, plus sa surface approche de celle du cercle; on a de tout temps considéré les polygones réguliers, et surtout ceux que nous avons déja nommé primitifs, comme les premiers termes d'autant de suites

qui ont toutes la même surface du cercle pour limite. On voit donc que ces sortes de problêmes, qu'on ne soupçonnoit d'abord d'aucune difficulté, doivent pourtant devenir d'autant plus compliquées à mesure que le nombre des côtés augmente. Malgré tous les efforts des géomètres, il n'y a que trois polygones réguliers primitifs, dont on ait la description rigoureuse et géometrique. Ces trois polygones sont, *le triangle équilatéral, le quarré* et *le pentagone régulier;* auxquels on peut ajouter *le pentadécagone,* parceque l'on peut assigner géométriquement l'arc de 24 degrés.

Les polygones dérivés qui se déduisent de ceux-ci sont; pour le triangle équilatéral, ceux de 6, 12, 24, 48, 96, etc. côtés; pour le quarré, ceux de 8, 16, 32, 64, 128, etc. enfin pour le pentagone, ceux de 10, 20, 40, 80, etc. côtés; tous résultants de l'arc du premier polygone régulier soudivisé continuellement, suivant la progression double 2, 4, 8, etc.

Nous nous proposons de démontrer dans ce chapitre que l'on peut avoir l'expression numérique du côté de tout polygone régulier qui peut se décrire géométriquement, ainsi que celle du côté de tout polygone régulier, dérivé de l'un des polygones primitifs dont on a la description géométrique; ou, ce qui revient au même, assigner le rapport du côté de chacun de ces polygones avec le rayon du cercle pris pour mesure ou pour unité; et réciproquement tout polygone régulier, dont on pourra assigner le rapport avec le rayon, sera susceptible d'être décrit géométriquement.

Il seroit naturel de commencer cette théorie des polygones réguliers par le triangle équilatéral qui est le plus simple de tous les polygones réguliers; mais ayant déja démontré (n°. 168) que le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon du cercle auquel il est inscrit, il sera facile d'en déduire la description du triangle équilatéral, et l'expression du rapport de son côté avec le rayon du cercle. Car ayant pris l'arc BE de 60° (*fig.* 105, n°. 2), et tiré les cordes BE, AE; cette dernière sera le côté du triangle équilatéral, et à cause du triangle AEB rectangle en E, on aura $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2 = 4 - 1 = 3$, en faisant le rayon du cercle égal à l'unité; donc $AE = \sqrt{3}$, et c'est le rapport du côté du triangle équilatéral au rayon du cercle. Si, par le centre C du cercle, on éleve la perpendiculaire CF au diametre AB, l'arc AF sera de 90°, et la corde AF, qui est le côté du quarré inscrit au cercle, sera exprimée par $\sqrt{2}$, à cause du triangle isoscele rectangle ACF, dont on fait chaque côté de l'angle droit égal à l'unité. Après le triangle équilatéral considéré comme polygone primitif, nous devons naturellement passer à la recherche du côté du pentagone régulier; mais parceque l'on aura aisément le côté du pentagone régulier, si l'on peut assigner géométriquement l'arc de 36°, ou le côté du décagone régulier, nous allons nous occuper de celui-ci dans le problême suivant.

PROBLÊME I.

270. *Trouver le côté du décagone régulier inscrit au cercle* (*fig.* 106).

ANALYSE ET SOLUTION.

Supposons le problême résolu et que l'arc AD est de 36°, en tirant les rayons CA et CD, chacun des angles CAD et CDA sur la base AD du triangle isoscele ACD sera de 72°, c'est-à-dire double de l'angle au centre ACD; donc si l'on divise l'un de ces angles, comme l'angle ADC en deux parties égales par une ligne DF, on aura (par le n°. 195) CD : AD :: CF : AF; mais le triangle CFD est isoscele à cause des angles DCF et FDC, chacun de 36°; et le triangle ADF est aussi isoscele, comme semblable au triangle ACD avec lequel il a un angle commun avec un angle de 36° égal dans chacun; donc AD = DF = CF; ainsi à cause que CA = CD, la derniere proportion devient CA : CF :: CF : AF; d'où il suit que pour inscrire le décagone régulier dans un cercle, la question se réduit à *couper le rayon* AC *dans un point* F, *tel que le rayon soit à sa plus grande partie* CF, *comme cette plus grande partie est à la plus petite* AF. Les anciens ont nommé cette maniere de diviser une ligne, *division en moyenne et extrême raison;* parceque la même ligne fournit les extrêmes et les moyens de la même proportion. Ils l'ont aussi nommée *sectio divina,* sans doute parcequ'elle auroit des propriétés très remarquables dans la théorie des sons harmoniques; et de plus nous verrons tout à l'heure que cette division est en effet très singuliere, et qu'elle donne deux suites infinies de lignes divisées de la même maniere, l'une par addition, et l'autre par soustraction; sans

compter d'autres rapports très intéressants que je lui ai trouvés pour exprimer les racines imaginaires du cinquieme degré sous une forme finie. Avant donc de résoudre ce problême, voyons encore si la description du pentagone régulier tient aux mêmes principes.

Dans cette vue, ayant pris l'arc DG = AD, et tiré le rayon CG, prolongé jusqu'à ce qu'il rencontre le côté AD du décagone aussi prolongé autant qu'il est nécessaire en *f*, il est évident 1°. que le triangle CD*f* est isoscele à cause des angles DC*f*, D*f*C, chacun de 36°, qui donne D*f* = CD = CG; donc, puisque la toute C*f* est égale à la toute A*f*, à cause du triangle isoscele A*f*C, et que sa partie CG est égale à la partie D*f*, il s'ensuit que la ligne G*f* sera égale à AD. 2°. Il n'est pas moins évident que la ligne A*f* est divisée en D de la même maniere que le rayon CA l'est en F, à cause des paralleles C*f*, DF; c'est-à-dire *en moyenne et extrême raison;* donc la ligne C*f* sera aussi divisée de la même maniere en G, en sorte que l'on aura C*f* : CG :: CG : G*f*; d'où il suit que pour décrire un pentagone régulier dans un cercle, il faut prolonger un rayon quelconque CG en *f*, de maniere *que le rayon ainsi prolongé soit à lui-même, comme ce même rayon est à son prolongement.* Car ayant ainsi déterminé le point *f*, de ce point comme centre, avec la ligne *f*C comme rayon, on n'auroit plus qu'à décrire un arc de cercle qui couperoit la circonférence du cercle proposé en un point A, duquel tirant AG, on aura l'arc de 72° ou le côté du pentagone régulier; ainsi la difficulté est absolument

tient la même pour la description de ces deux polygones ; comme on devoit naturellement s'y attendre, occupons-nous donc de ce nouveau problême.

PROBLÊME II.

271. *Diviser une ligne* AB (*fig.* 107) *en moyenne et extrême raison ; c'est-à-dire la diviser en un point* D *tel que l'on ait* AB : AD :: AD : BD.

ANALYSE ET SOLUTION.

Supposant que le point D satisfait à la question, on aura par hypothese AB : AD :: AD : BD ou AB — AD ; proportion dans laquelle il y a trois termes affectés de l'inconnue. Je cherche donc si je ne pourrois pas la réduire à une autre, dans laquelle je puisse avoir deux termes entièrement connus ; et je vois sur le champ que par un *componendo*, on aura AB + AD : AB :: AB : AD ; donc la ligne donnée AB est moyenne proportionnelle entre l'inconnue et la même inconnue jointe avec la ligne AB. Or, je vois encore que cette proportion appartient à un cercle qui auroit pour tangente la ligne AB et pour sécante la ligne AB + AD ; donc, si je fais passer cette sécante par le centre du cercle ; la ligne AB, partie intérieure de cette même sécante, sera le diametre du cercle à décrire, d'où l'on déduit sur le champ la construction suivante.

CONSTRUCTION.

A l'extrémité B de la ligne donnée AB qu'il

faut diviser en moyenne et extrême raison, soit élevée la perpendiculaire BC égale à la moitié de la ligne AB; puis ayant tiré AC et décrit du centre C avec le rayon CB une circonférence de cercle qui coupe CA ou G, on portera la ligne AG de A en D, et le point D sera celui qu'on demande. Car à cause de la sécante entiere AF et de la tangente AB, on aura AF ou AB + AD : AB :: AB : AG ou AD, donc *detrahendo* AB : AD :: AD : AB — AD ou BD. C. Q. F. T. et D.

Corollaire I.

272. Puisque nous avons AF : AB :: AB : AG, et que le diametre GF est par construction égal à AB, on aura aussi AF : FG :: FG : AG; donc la ligne AF est divisée en moyenne et extrême raison au point G; si donc du point A comme centre avec le rayon AF, on décrit un arc de cercle terminé à la ligne AB prolongée en L; à cause de AL = AF et de GF = AB, on aura BL = AG = AD; donc on aura AL : AB :: AB : BL; c'est-à-dire que *si, à une ligne* AB *déja divisée en moyenne et extrême raison au point* D, *on ajoute sa plus grande partie* AD *de* B *en* L, *la nouvelle ligne* AL *sera divisée en moyenne et extrême raison au point* B; et parceque cette addition de la plus grande partie peut se faire à l'infini, on voit que l'on peut avoir par addition une suite infinie de lignes divisées en moyenne et extrême raison : on verra de même que par soustraction de la plus petite partie, on aura encore une autre suite infinie décroissante de lignes divisées suivant la même loi.

COROLLAIRE II.

273. Si la ligne AB est prise pour rayon du cercle et pour unité, la ligne AD sera le côté du décagone régulier inscrit au même cercle. Or, à cause du triangle rectangle ABC, on a $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; donc $AC = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, et AG ou $AD = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; donc le côté du décagone régulier est au rayon du cercle :: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} : 1$ ou :: $-1+\sqrt{5} : 2$.

COROLLAIRE III.

274. Supposant toujours le rayon CA divisé en moyenne et extrême raison en F, en sorte que sa portion CF soit égale au côté du décagone régulier inscrit au cercle dont cette ligne est le rayon (*fig.* 106), il est aisé de trouver le côté du pentagone régulier inscrit au même cercle, en portant la ligne CF de A en D et de D en G sur la circonférence; car l'arc ADG étant de 72°, la corde AG sera le côté du pentagone régulier inscrit au même cercle.

PROBLÈME III.

275. *Trouver le côté du pentagone régulier inscrit au cercle; ou, ce qui revient au même, assigner le rapport du côté de ce polygone avec le rayon du cercle.*

SOLUTION.

On a vu ci-dessus (n° 274) que le triangle CFD

est isoscele, ainsi que le triangle ADF; on a aussi démontré que la ligne Gf est égale à GD; donc si du point G, comme centre avec le rayon GD, on décrit une circonférence de cercle, elle passera par le point f, et coupera la ligne AG aux points I, L, en sorte que GL = GI; on aura donc cette suite de lignes GI, GL, Gf, GD, AD, DF, FC, toutes égales entre elles; et par conséquent on pourra prendre celle que l'on voudra comme CF à la place de telle autre. De plus, nous avons fait voir que Df = CG ou CA. Cela posé, à cause des sécantes Af, AL, qui se coupent au-dehors du cercle en A, on aura AL : Af :: AD : AI, ou en substituant AG + CF : CA + CF :: CF : AG − CF; donc (AG + CF) × (AG − CF) = AC × CF + $\overline{CF}^2$ = AC × CF + AC × AF, à cause que l'on a $\overline{CF}^2$ = AC × AF; donc (n°. 235) $\overline{AG}^2 - \overline{CF}^2 = \overline{AC}^2$, et ajoutant $\overline{CF}^2$ à chaque membre $\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CF}^2$; d'où il suit que *le quarré du côté du pentagone vaut à lui seul le quarré du rayon, plus le quarré du côté du décagone régulier inscrit au même cercle;* donc à cause que nous avons trouvé pour la valeur ou expression numérique du côté du décagone $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, on aura $\overline{AG}^2 = 1 + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{4+6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{10-2\sqrt{5}}{4}$; donc $AG = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. C. Q. F. T. et D.

COROLLAIRE I.

276. Cette proposition donne un moyen bien simple de trouver en même temps les côtés du décagone et du pentagone réguliers, inscrits au même cercle. Pour cela, ayant élevé, par le centre C au diametre AB (*fig.* 108), le rayon CD qui lui soit perpendiculaire; du point F milieu de CB, avec le rayon FD, on décrira un arc de cercle qui coupe le rayon CA en G; la ligne CG sera le côté du décagone régulier; donc à cause que CD est le côté de l'hexagone et que le triangle DCG est rectangle en C, la ligne DG sera le côté du pentagone régulier à inscrire au même cercle, par une suite de la solution du dernier problême.

COROLLAIRE II.

277. Donc, si l'on fait le rayon du cercle de 1000 parties, le côté du décagone et du pentagone réguliers seront respectivement de 618 et 1662 des mêmes parties du rayon, en prenant le nombre 2,236068 pour la valeur de $\sqrt{5}$ à un millionieme d'unité près, et la substituant dans les expressions des côtés du décagone et du pentagone réguliers: ce qui peut encore servir à décrire promptement ces polygones dans un cercle dont le rayon est donné, en se servant de l'échelle des parties égales du compas de proportion.

COROLLAIRE III.

278. Il suit de-là que l'on peut inscrire

géométriquement au cercle un polygone de 15 côtés : car puisque le rayon est la corde de 60°, et que nous venons d'assigner rigoureusement celle de 36°; en prenant la difference de ces deux arcs, on aura l'arc de 24° ou de la 15eme partie de la circonférence. On voit aussi par-là comment on peut arriver géométriquement à l'arc de trois degrés; en divisant l'arc de 24° trois fois de suite en deux également; donc, on aura aussi géométriquement les arcs de 9, de 27, de 81, de 243, etc. et par conséquent ces mêmes arcs sont susceptibles d'une trisection rigoureuse et géométrique qui s'arrête à l'arc de 3°.

SCHOLIE.

275. Ces polygones sont, comme nous l'avons déja dit, les seuls susceptibles d'une description exacte et géométrique. Celles d'un polygone de 7 et de 9 côtés dépendent de la résolution d'une équation du troisieme degré. Les polygones de 11, 13, etc. côtés tiennent à des problêmes de degrés encore plus élevés; mais soit qu'il s'agisse d'inscrire dans un cercle un polygone régulier d'un plus grand nombre de côtés, soit qu'il faille construire sur une ligne donnée un pareil polygone : dans la pratique, on peut résoudre ces sortes de questions d'une maniere suffisamment exacte par le moyen du compas de proportion.

Qu'on demande, par exemple, de construire sur une ligne donnée un ennéagone régulier : ayant pris avec un compas la grandeur de cette ligne, on ouvrira le compas de proportion de maniere

que la distance de 40° à 40° sur la ligne des cordes soit égale à l'ouverture du compas pour la ligne donnée. On prendra ensuite sur la même ligne des cordes la distance de 60° à 60°, et cette ligne sera le rayon du cercle dont le côté de l'ennéagone régulier est égal à la ligne donnée.

Lorsque l'on sait, par les moyens donnés jusqu'ici, inscrire au cercle un polygone régulier, il n'y a plus aucune difficulté à lui circonscrire des polygones réguliers d'un même nombre de côtés. Passons à la théorie des polygones dérivés de ceux-ci, considérés comme primitifs.

PROBLÈME III.

280. *Soit un arc quelconque* AL (*fig.* 109), *dont le supplément* LB *soit divisé en deux parties égales en* F; *soit pareillement pris l'arc* AF *pour l'arc* AL, *et son supplément* FB *divisé en deux parties égales, et ainsi de suite pour tous les autres arcs; supposant de plus que l'on connoît la corde* AL *ou son rapport avec le rayon; on demande l'expression ou le rapport des cordes* AF, Af, Af^1, *etc. avec le même rayon pris pour unité.*

SOLUTION.

Sur le diamètre AB prolongé, on prendra BG = AL, puis on tirera FG, ainsi que le rayon CF; il suit de cette construction que le triangle GBF est égal en tout au triangle ALF; car les angles GBF et ALF sont égaux, comme ayant chacun leur sommet à la circonférence, et pour mesure la moitié d'une demi-circonférence aug-

mentée de l'arc BF; donc, puisque ces angles égaux sont compris entre côtés égaux, ils seront égaux en tout, comme nous l'avons annoncé; donc FG = AF, et par conséquent le triangle AFG est isoscele; mais le triangle ACF est aussi isoscele, et de plus a un angle commun en A avec celui-ci; donc ces triangles ACF et AFG sont semblables, et donnent AC : AF :: AF : AG = AB + AL; ou, en faisant le rayon égal à l'unité, 1 : AF :: AF : 2 + AL; donc $\overline{AF}^2 = 2 + AL$ et $AF = \sqrt{(2 + AL)}$.

Faisant la même opération pour l'arc AF, et tirant la corde Af, on aura $Af = \sqrt{2+\sqrt{2+AL}}$; et de même $Af' = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+AL}}}$ et ainsi de suite; donc, si l'on connoît la valeur de la corde AL, on connoîtra pareillement celle des cordes AF, Af, Af', etc. C. Q. F. T. et D.

Corollaire I.

281. Connoissant les cordes AL, AF, Af, Af', etc; il sera facile d'avoir les cordes BL, BF, Bf, Bf' des arcs suppléments de ceux soutenus par les premieres cordes. Car tous les triangles ALB, AFB, AfB, etc. étant rectangles, puisqu'ils ont leur sommet à la circonférence, et qu'ils sont appuyés sur le diametre, on aura $BL = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AL}^2} = \sqrt{4 - \overline{AL}^2}$; de même $BF = \sqrt{2 - AL}$, $Bf = \sqrt{2 - \sqrt{2+AL}}$; et ainsi de suite,

COROLLAIRE II.

282. Si la ligne AL est la corde de 90°, les cordes BF, Bf, Bf' seront les côtés des polygones réguliers de 8, 16, 32, 64, etc. côtés, suivant la progression géométrique double. Si la ligne AL est la corde de 120° ou le côté du triangle équilatéral; les cordes BL, BF, Bf, Bf' seront les côtés respectifs des polygones de 6, 12, 24, 48, 96, etc. suivant une autre progression géométrique double dont le premier terme est 3. Enfin si la ligne AL est égale à $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, c'est-à-dire à la corde du supplément de 72°; les cordes BL, BF, Bf, etc. seront respectivement égales aux côtés des polygones réguliers de 5, 10, 20, 40, 80, côtés, suivant une nouvelle progression géométrique double dont 5 est le premier terme. Donc, si l'on connoît le rapport du côté du premier polygone primitif avec le rayon du cercle, on aura aussi le rapport des côtés des différents polygones dérivés avec le même rayon; et comme plus ces polygones auront de côtés, plus le contour de chacun approche de se confondre avec la circonférence du cercle; on aura autant de séries différentes dont chacune fournit une approximation du rapport de la circonférence au diametre.

COROLLAIRE III.

283. Quelle que soit la valeur de la premiere corde AL, on voit que toutes les cordes AF, Af, Af' tendent continuellement à se confondre avec

le diametre qui est égal au nombre 2, ainsi la suite infinie exprimée par $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+AL}}}}$, et composée d'un nombre infini de radicaux, les uns sur les autres, a pour limite le même nombre rationnel 2. On voit de plus, à cause des différentes valeurs dont AL est susceptible, que ce même nombre 2 est la limite d'une infinité de suites infinies de radicaux différents. Cette vérité peut d'ailleurs se démontrer directement; car, faisant cette expression $= x$, et élevant chaque membre au quarré, nous aurons $x^2 = 2 + \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2,\text{ etc.}}}}$ Or, comme cette derniere est encore égale à x par l'hypothese, nous aurons $x^2 = 2 + x$, ou $x^2 - x = 2$; complétant le quarré, et réduisant, on aura $x = 2$ et $x = 1$. Il est donc possible qu'une infinité de suites infinies de radicaux, toutes différentes par un dernier terme, aient toutes pour limite un même nombre commensurable.

Avertissement. Lorsque nous aurons dans les calculs ci-après une suite de radicaux qui doivent s'étendre les uns sur les autres; pour la facilité de la typographie, nous marquerons par des points le nombre de termes que doit embrasser chaque radical; ainsi quatre points, après le premier terme, indiqueront qu'il s'étend sur quatre termes consécutifs; de même trois points après le second terme marqueront qu'il embrasse les trois termes suivants, et ainsi des autres. Cela posé, on entendra facilement les expressions dont nous allons faire usage.

PROBLÊME GÉNÉRAL.

284. *Supposant que l'on connoisse le rapport du côté d'un polygone régulier primitif avec le rayon du cercle auquel il est inscrit; supposant de plus une suite de nouveaux polygones réguliers, dont le nombre des côtés augmente suivant la progression géométrique double, à l'égard du premier polygone; trouver les rapports des côtés de ces mêmes polygones avec le même rayon.*

SOLUTION.

Du quarré du diametre, ôtez ceux des cordes AL, AF, Af, Af', etc. et vous aurez les quarrés des côtés des polygones dérivés, suivant la progression double, et par conséquent la racine quarrée de chacune de ces expressions donnera le rapport du côté de chacun de ces polygones avec le rayon.

Soit donc 1°. AL $= \sqrt{2}$, BL sera pareillement égal à $\sqrt{2}$, et l'on formera cette série des côtés des polygones réguliers.

Côté du polygone de

$$8 = \sqrt{2.-\sqrt{2}}$$
$$16 = \sqrt{2..-\sqrt{2.}+\sqrt{2}}$$
$$32 = \sqrt{2...-\sqrt{2..}+\sqrt{2.}+\sqrt{2}}$$
$$64 = \sqrt{2....-\sqrt{2...}+\sqrt{2..}+\sqrt{2.}+\sqrt{2}}$$
$$128 = \sqrt{2.....-\sqrt{2....}+\sqrt{2...}+\sqrt{2..}+\sqrt{2.}+\sqrt{2}}$$

2°. Soit AL $= \sqrt{3}$ côté du triangle équilatéral,

BL côté de l'hexagone sera égal à l'unité, ou au rayon; et l'on trouvera

Côtés des polygones réguliers de

$$12 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$24 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$48 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

$$96 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

$$192 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}$$

etc.

3°. Si l'on fait $AL = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, c'est-à-dire égale à la corde du supplément de 72°, on aura, par les calculs des différentes cordes AF, Af, Af', etc. ainsi que des cordes BL, BF, Bf, Bf', les côtés des polygones de 5, 10, 20, 40, 80, côtés etc. suivant une progression géométrique double dont 5 est le premier terme.

On voit donc que si l'on connoît le rapport du côté d'un polygone primitif et régulier avec le rayon du cercle, on aura aussi le rapport du côté de tous les polygones réguliers dérivés de celui-ci par une sous-division continuelle de l'arc soutenu par le côté du premier polygone en deux parties égales. C. Q. F. T. et D.

PREMIER SCHOLIE.

285. Comme les cordes BF, Bf, Bf' tendent à devenir enfin égales à zéro, on voit que, dans les expressions précédentes, les séries infinies de radicaux, et affectées d'un signe négatif, doivent être égales au même nombre 2, qui est la limite

commune et rationnelle de toutes ces suites infinies dont l'expression est cependant différente, suivant la valeur de la ligne AL, qui entre dans chacune, et qui est $\sqrt{2}$ pour le quarré, $\sqrt{3}$ pour le triangle équilatéral, et $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ pour le pentagone régulier, considérés chacun comme polygone régulier primitif. (Avis à ceux qui concluent que le rapport de la circonférence du cercle au diametre ne peut être exprimé en nombres commensurables, parceque tous les polygones réguliers, dont il est la limite, sont chacun des multiples de grandeurs irrationnelles. Nous ne prétendons pas pour cela que ce rapport soit commensurable, ni qu'il puisse jamais être assigné ou démontré impossible; nous n'attaquons que le raisonnement par lequel on voudroit pouvoir conclure que ce rapport est de toute incommensurabilité.)

Second Scholie.

286. On voit encore par-là comment on peut avoir l'expression approchée à l'indéfini du côté du polygone de 96 côtés inscrit au cercle, et calculé par *Archimede*. Cette théorie, qui est, à la vérité, très différente de celle du géometre de Syracuse, est due à *Snellius*, mathématicien hollandois, et distingué par ses recherches sur la mesure de la terre. M. *Simpson* a suivi cette méthode pour calculer le côté d'un polygone de 768 côtés, dont il a conclu le contour égal à 6,28317 pour un diametre deux; donc, si l'on fait ce même diametre = 1, on aura, pour le périmetre du

polygone dont il s'agit, 3,14158. Or, comme le contour de ce polygone serre déja de très près la circonférence du cercle, on voit que le rapport de la circonférence au diametre doit être à très peu près égal à celui de 3,14158 à l'unité, mais un peu plus fort. Joignons encore quelques vérités importantes sur cette matiere, afin de donner aux commençants une idée des travaux des géometres sur le fameux problême de la quadrature du cercle, et de leur éviter les écueils contre lesquels ceux même qui ont les plus heureuses dispositions vont se briser, faute de connoître l'état de la question.

THÉORÊME II.

287. *Si l'on inscrit dans un cercle un polygone régulier de tant de côtés que l'on voudra, et un autre polygone régulier d'un nombre double de côtés, la surface du premier polygone sera à celle du second comme la corde du supplément de l'angle au centre du premier est au diametre du cercle* (*fig.* 110).

DÉMONSTRATION.

Soit BF, le côté d'un polygone régulier quelconque inscrit au cercle, et B*f* celui d'un autre polygone régulier d'un nombre double de côtés, inscrit au même cercle. AF sera la corde du supplément de l'angle au centre du premier. Soit de plus n le nombre des côtés du premier polygone; $2n$ sera celui des côtés du second polygone, l'aire du premier sera n BCF, et celle du second sera $2n$ BC*f*. Il faut donc prouver

que n BCF : $2n$ BCf :: AF : AB; ce qui ne souffrira aucune difficulté : car l'aire du triangle BCF $=$ CG $\times$ BG et celle du triangle BCf $=\frac{1}{2}$ BG $\times$ Cf; donc n BCF : $2n$ BCf :: n CG $\times$ BG : n BG $\times$ Cf :: CG : Cf, en divisant les deux termes du second rapport par n BG, ou :: AF : AB, en doublant les deux derniers termes BG et Cf; donc n BCF : $2n$ BCf :: AF : AB. C. Q. F. D.

Corollaire I.

288. Il est aisé de conclure de-là le rapport de la surface d'un polygone régulier quelconque à celle d'un autre polygone régulier, inscrit au même cercle, et dont le nombre des côtés seroit à celui des côtés du premier polygone primitif, comme un quelconque des termes de la progression géométrique double 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, etc. est à l'unité. Car désignant par BF, Bf, Bf', Bf'', etc. les côtés de ces polygones réguliers, dont celui qui a BF pour côté, est le polygone primitif; les cordes AF, Af, Af', Af'', etc. seront respectivement les cordes de supplément des angles au centre de chacun de ces nouveaux polygones, y compris le premier; et les aires de ces polygones seront respectivement nBCF, $2n$ BCf, $4n$ BCf', $8n$ BCf'', etc. et par le présent théorême, on aura ces suites de proportions

n BCF : $2n$ BCf :: AF : AB.
$2n$ BCf : $4n$ BCf' :: Af : AB.
$4n$ BCf' : $8n$ BCf'' :: Af' : AB.
$8n$ BCf'' : $16n$ BCf''' :: Af'' : AB.

Donc, en multipliant ces mêmes proportions deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, et ainsi de suite; et divisant les termes du premier rapport par les quantités qui leur sont communes, on aura

$$n\,\mathrm{BCF} : 2n\,\mathrm{BC}f :: \mathrm{AF} : \mathrm{AB}.$$

$$n\,\mathrm{BCF} : 4n\,\mathrm{BC}f' :: \mathrm{AF}\times \mathrm{A}f : \overline{\mathrm{AB}}^{2}$$

$$n\,\mathrm{BCF} : 8n\,\mathrm{BC}f'' :: \mathrm{AF}\times \mathrm{A}f\times \mathrm{A}f' : \overline{\mathrm{AB}}^{3},$$

etc.

c'est-à-dire que *la surface du premier polygone est à celle d'un quelconque de ses dérivés, suivant la progression géométrique double; comme le produit de toutes les cordes de supplément des angles au centre de ces différents polygones, est à une puissance du diametre marqué par le nombre des polygones qui précedent ce dernier.*

COROLLAIRE II.

289. Donc, si l'on connoît l'aire du premier polygone primitif, et les cordes AF, Af, Af', Af'', etc. des suppléments des angles au centre de ces polygones successifs, on aura celle de telle polygone régulier que l'on voudra à l'égard du premier, et dont le nombre des côtés est à celui des côtés du premier polygone, comme un quelconque des termes de la progression géométrique double, à l'unité. Or, comme les surfaces de ces polygones approchent d'autant plus de l'aire du cercle que le nombre de leurs côtés est plus grand; on voit comment on peut déduire de

de ce théorême un nombre indéfini de manieres d'approcher de la quadrature du cercle.

COROLLAIRE III.

290. Si la ligne BF est égale au rayon du cercle ; ou, ce qui revient au même, si le premier polygone est un hexagone régulier, le polygone $2n$BCf sera un dodécagone régulier, inscrit au même cercle. AF sera $\sqrt{3}$, et la proportion n BCF : $2n$ BCf :: AF : AB deviendra celle-ci, *hexagone* : *dodécagone* :: $\sqrt{3}$: 2 ; mais le quarré du diametre est à la surface de l'hexagone régulier :: 4 : $\frac{3}{2}\sqrt{3}$; donc, en multipliant ces proportions par ordre, on trouvera que *l'aire du dodécagone régulier est rigoureusement égale aux trois quarts du quarré circonscrit au cercle, ou du quarré du diametre.*

Si la ligne BF $= \sqrt{2}$; AF sera aussi égale à $\sqrt{2}$, et l'on trouvera, par un raisonnement semblable à celui qu'on vient de faire, que l'aire de l'octogone régulier est au quarré du diametre :: 1 : $\sqrt{2}$.

THÉORÊME III.

291. *Ayant inscrit et circonscrit au même cercle deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés* (*fig.* 111), *si l'on lui inscrit un nouveau polygone régulier d'un nombre double de côtés ; je dis que l'aire de ce polygone sera moyenne proportionnelle géométrique, entre celles du polygone inscrit et circonscrit au même cercle.*

DÉMONSTRATION.

Soit MC*m* l'un des triangles du polygone inscrit : ayant mené par le point M la tangente MT, terminée au rayon CA, prolongé en T, puis M*t* = MT, et tiré C*t*; il est évident que le triangle TC*t* sera l'un des triangles partie aliquote semblable du polygone circonscrit au cercle, et du même nombre de côtés; il n'est pas moins évident, en tirant la corde AM, que le triangle ACM sera l'un des triangles du polygone inscrit du double de côtés. Désignant donc par *n* le nombre des côtés des polygones inscrits et circonscrits; à cause que les triangles MC*m* et TC*t* valent respectivement 2 MCP et 2 MCT; il est visible que les polygones inscrits et circonscrits, ainsi que le polygone inscrit d'un nombre de côtés doubles, auront pour expression de leurs surfaces respectives, $2n \times$ MCP, $2n \times$ MCT, $2n \times$ MCA; donc, à cause que ces quantités ont un facteur commun $2n$, en divisant chaque terme par ce facteur, ces surfaces seront entre elles comme les triangles MCP, MCT, MCA; mais les triangles CMP, CMA, CMT, ayant tous leur sommet au même point M, sont entre eux comme leurs bases CP, CA et CT. Enfin, à cause des triangles rectangles semblables CPM et CMT, CP : CM :: CM : CT, ou, en mettant le rayon CA pour le rayon CM, CP : CA :: CA : CT; donc, puisque ces lignes sont entre elles, comme le polygone inscrit, le polygone inscrit d'un nombre double de côtés, et le polygone circonscrit, il est démontré que

la surface moyenne géométrique entre celles des polygones inscrits et circonscrits d'un même nombre de côtés, est précisément celle du polygone inscrit qui a le double de côtés. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

292. On voit par ce théorême l'erreur de ceux qui croient trouver la quadrature du cercle, en prenant une surface moyenne géométrique entre celles d'un polygone inscrit, et d'un autre polygone circonscrit au même cercle, et d'un même nombre de côtés. A la vérité, l'erreur est d'autant moindre que le nombre des côtés de ces polygones réguliers est plus grand, et de plus cette surface est toujours moindre que celle du cercle.

THÉORÊME IV.

293. *De tous les polygones réguliers qui ont le même contour, le cercle est celui qui a le plus de surface* (*fig.* 111).

DÉMONSTRATION.

Soient L*l*, N*n* les côtés correspondants de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, l'un inscrit et l'autre circonscrit au même cercle. Il est visible que chacun de ces côtés sera une partie aliquote semblable du polygone auquel il appartient, et l'arc de cercle correspondant sera une même partie aliquote de sa circonférence, et par conséquent ce que l'on démontrera à l'égard de ces parties, sera également vrai pour chaque tout auquel il se rap-

porte. Cela posé, il est de toute évidence que l'arc LB*l* du cercle est plus grand que sa corde L*l*, et plus petit que la tangente N*n*, terminée aux rayons CL, C*l* prolongés autant qu'il est nécessaire; donc, si l'on veut assigner une droite égale au même arc LB*l*, cette ligne, comme H*h*, sera comprise entre les droites paralleles L*l*, N*n*; et si, sur cette ligne, on construit un nouveau polygone régulier semblable à chacun des polygones inscrits et circonscrits au même cercle, le contour ou périmetre de ce nouveau polygone sera égal à la circonférence du cercle; donc, le secteur BLC*l* et le triangle HC*h* seront des parties aliquotes semblables du cercle, et du nouveau polygone qui a même contour que le cercle. Mais il est de toute nécessité que C*o*, qui mesure la hauteur du triangle HC*h*, soit plus courte que le rayon CB, hauteur commune à tous les triangles qui forment le secteur BLC*l*; donc, la surface du triangle HC*h* est nécessairement moindre que celle du secteur qui lui répond dans le cercle; donc, le polygone régulier isopérimetre au cercle est aussi nécessairement moindre que le cercle; ou, ce qui revient au même, *la surface du cercle est plus grande que celle d'aucun polygone régulier de même contour que lui, quel que soit le nombre des côtés de ce polygone.* C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

294. Il suit de ce théorême que de deux polygones réguliers de même contour, celui qui a le plus de côtés est le plus grand, puisque plus il aura de côtés, plus il approchera du cercle qui

est le plus grand de tous les polygones réguliers isopérimetres. Cette vérité peut d'ailleurs se démontrer directement, et d'une maniere plus rigoureuse.

SCHOLIE.

295. Comme on a souvent besoin dans la pratique de rectifier la circonférence entiere, ou quelques unes de ses parties, je ne puis terminer ce chapitre sans faire connoître quelques unes des constructions géométriques qui donnent avec beaucoup de précision la longueur de la circonférence d'un cercle dont le rayon ou le diametre sont pris pour unité.

PREMIERE CONSTRUCTION.

A trois fois le diametre, ajoutez le cinquieme du côté du quarré inscrit au même cercle, la somme sera la valeur de la circonférence, à moins de $\frac{1}{5000}$ du rayon; car faisant le rayon $= 1$, le côté du quarré inscrit est $\sqrt{2} = 1,414213$, dont le cinquieme est $0,282842$, qui, joint avec trois fois le diametre, donne $6,282842$ pour la circonférence; donc, si le diametre est lui-même égal à 1, on aura $3,141421$ au lieu de $3,141592$ qu'elle devroit être par le rapport de *Ludolphe*.

SECONDE CONSTRUCTION.

Ayant élevé à l'extrémité du diametre une ligne égale à trois fois le rayon, et à l'autre extrémité du même diametre la tangente de 30°; joignez les extrémités de ces deux lignes, et vous aurez une ligne à-peu-près égale à la demi-circon-

férence. Car, d'après cette construction, la ligne, ainsi trouvée, sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un des côtés est le diametre, et dont l'autre côté est l'excès du triple du rayon sur la tangente de 30°. Or, il est facile de calculer cette hypoténuse comme il suit : le rayon étant égal à l'unité, la tangente de 30° sera $\frac{1}{\sqrt{3}}$; donc la différence du triple du rayon à cette même ligne sera $3 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, dont le quarré est $9\frac{1}{3} - 2\sqrt{3}$; ajoutant le quarré du diametre, on a $13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3}$. Calculant la racine de 3 à un millionieme d'unité près, elle est de 1,732050; donc, $2\sqrt{3} = 3{,}464100$. Retranchons cette quantité de $13\frac{1}{3} = 13{,}333333$, on aura 9,869233 pour le quarré de la ligne que nous disons égale à la demi-circonférence. En effet, la racine de ce nombre est 3,14153 qui ne differe que de $\frac{6}{100000}$ ou de $\frac{3}{50000}$, erreur insensible dans la pratique. Cette construction est due au pere *Kolkanski*, jésuite polonois, et l'une des plus heureuses par sa simplicité.

M. *Viete* a donné une autre construction géométrique de la circonférence du cercle par la division d'une ligne en moyenne et extrême raison. Voici la regle qu'il donne. Faites la proportion ; *comme le petit segment d'une ligne quelconque divisée, suivant cette condition, est à cette ligne entiere, ainsi le diametre est à un quatrieme terme qui sera les* $\frac{5}{6}$ *de la circonférence,* ou, ce qui revient au même, *divisez le quarré du diametre par le petit segment du même diametre*

divisé en moyenne et extrême rayon; le quotient sera les $\frac{5}{6}$ de circonférence du cercle qui auroit cette même ligne pour diametre.

En effet, désignant le diametre par l'unité, son petit segment, après l'avoir divisé en moyenne et extrême raison, sera très exactement de 0,3819665; divisant le quarré de l'unité par cette ligne, on aura au quotient 2,61803, dont le cinquieme 0,52360, qui, joint avec le même quotient, donne 3,14163 au lieu de 3,14159; de maniere que l'erreur est à-peu-près de $\frac{1}{25000}^{me}$ du diametre.

On peut voir dans les ouvrages de M. *Huygens* d'autres ratifications très heureuses de la circonférence entiere et de ses différentes parties : on en trouvera le détail dans le livre déja cité des recherches sur la quadrature du cercle par M. *Montucla*. Nous avons déja donné un moyen de vérifier toutes ces méthodes d'approximations, en les soumettant au calcul, et comparant le résultat avec le module 3,14159265389.

CHAPITRE XI.

Du rapport des surfaces en général, et en particulier de celui des figures semblables; usage de cette théorie pour la multiplication et la division des surfaces par tels nombres que l'on voudra; construction de la ligne des plans du compas de proportion, soit par la géométrie, soit par le calcul; application de ces principes au dessin des plans et cartes, de quelque espece qu'elles puissent être; solution de divers problémes qui ont rapport à la géodésie, ou division des champs; détermination de l'aire du triangle par la connoissance de ses côtés, ainsi que du rayon du cercle circonscrit au même triangle.

THÉORÊME I.

296. *Deux triangles* BAC, DAF (*fig.* 112), *qui ont un angle commun en* A, *sont entre eux comme les produits des côtés qui renferment cet angle.*

DÉMONSTRATION.

Soit tirée la ligne ponctuée CD; les triangles ACB, ACD, ayant leur sommet au même point, et par conséquent même hauteur, seront entre eux comme leurs bases AB, AD; ce qui donne

la proportion ACB : ACD :: AB : AD ; considérant maintenant le triangle ACD, comme s'il avoit son sommet en D, et le comparant au triangle ADF, on verra que ces triangles ayant même hauteur, seront entre eux comme leurs bases ; ce qui donne ADC : ADF :: AC : AF ; donc en multipliant ces deux proportions, termes par termes, et divisant les deux termes du premier rapport par ACD, on aura ACB : ADF ou BAC : DAF :: AB × AC : AD × AF ; d'où il suit que *deux triangles quelconques, qui ont un angle commun, sont comme les produits des côtés qui contiennent cet angle.* C. Q. F. D.

Corollaire I.

297. Si l'on prend sur AB, prolongé vers *b*, une partie A*b* = AB, et si l'on tire C*b*, le triangle AC*b* sera égal au triangle ACB, puisqu'ils ont même base et même hauteur ; donc, ce nouveau triangle aura le même rapport avec DAF que le premier. Ce qui donnera *b*AC : DAF :: A*b* × AC : AD × AF ; d'où il suit que *deux triangles qui ont des angles, suppléments l'un de l'autre, sont comme les produits des côtés qui renferment ces angles.*

Corollaire II.

298. Comme un triangle est toujours la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur, et que d'ailleurs les moitiés sont entre elles comme les tous ; il suit du théorême présent que *deux parallélogrammes qui ont des angles égaux, ou suppléments l'un de l'autre,*

sont entre eux comme les produits des côtés qui renferment ces angles.

COROLLAIRE III.

299. Donc, *deux triangles ou deux parallélogrammes sont égaux en surfaces lorsqu'ils ont des angles égaux ou suppléments l'un de l'autre compris entre côtés réciproques.* Car alors les produits, qui expriment les rapports de ces triangles ou parallélogrammes, sont égaux, en tant que l'un est le produit des extrêmes ou des moyens d'une même proportion, dont l'autre est le produit des moyens ou des extrêmes.

COROLLAIRE IV.

300. Si l'on suppose que la ligne BC soit parallele à la ligne DF, alors les triangles BAC, DAF sont semblables, et sont toujours entre eux comme AB × AC : AD × AF, à cause de l'angle A qui leur est commun; mais à cause des paralleles, BC, DF, on a
AC : AF :: AB : AD, et d'ailleurs on a toujours AB : AD :: AB : AD; donc, en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura AB × AC : AD × AF :: $\overline{AB}^2$: $\overline{AD}^2$, et parceque les triangles semblables ont leurs côtés homologues proportionnels, ce qui donne AB : AD :: AC : AF :: BC : DF; on aura aussi $\overline{AB}^2$: $\overline{AD}^2$: $\overline{AC}^2$: $\overline{AF}^2$ :: $\overline{BC}^2$: $\overline{DF}^2$; donc, puisque nos deux triangles BAC, DAF sont entre eux comme les produits AB × AC, AD × AF, et que ces mêmes produits sont comme

les quarrés des côtés homologues, il s'ensuit que *les aires de deux triangles semblables sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.*

SCHOLIE.

301. On voit que si les triangles *b*AC, DAF, qui ont des angles, suppléments l'un de l'autre, sont d'ailleurs compris entre côtés proportionnels, ils seront entre eux comme les quarrés de ces mêmes côtés proportionnels, sans qu'ils soient semblables : ainsi, de ce que deux triangles seroient entre eux comme les quarrés de quelques uns de leurs côtés, il ne s'ensuit pas qu'ils soient semblables.

THÉORÊME II.

302. *Deux polygones irréguliers quelconques semblables* ABCDEF, *abcdef* (*fig.* 113), *sont entre eux pour leurs surfaces, comme les quarrés de leurs côtés homologues; ou comme les quarrés des diagonales menées par deux angles égaux de ces polygones; ou enfin comme les quarrés de toutes les lignes homologues de ces mêmes figures.*

DÉMONSTRATION.

On a fait voir (n°. 223) que si par deux points G, *g*, semblablement placés au-dedans de deux polygones semblables, on mene des lignes droites à tous les angles correspondants de ces mêmes polygones, elles les diviseront en un même nombre de triangles semblables ; et parceque ces triangles sont entre eux comme les quarrés de

leurs côtés homologues, on aura ces deux suites de proportionnelles

AGB : BGC : CGD : DGE : EGF : FGA :: *agb* : *bgc* : *cgd* : *dge* : *egf* : *fga* :: $\overline{AB}^2$: $\overline{ab}^2$ :: $\overline{BC}^2$: $\overline{bc}^2$ :: $\overline{GA}^2$: $\overline{ga}^2$, etc. ; donc, puisque, dans deux séries de quantités proportionnelles, la somme des antécédents est à celle des conséquents, comme un antécédent est à son conséquent, on aura *la somme de tous les premiers triangles*, ou le polygone ABCDEF est *à celle de tous les seconds triangles*, ou le polygone *abcdef*, comme ABC : *abc* :: $\overline{AB}^2$: $\overline{ab}^2$ :: $\overline{GA}^2$: $\overline{ga}^2$, c'est-à-dire que *les aires de deux polygones semblables sont entre elles, comme les quarrés de deux côtés correspondants quelconques, ou comme les quarrés des lignes tirées par des points semblablement placés dans ces polygones, et terminées à ces mêmes points ; en un mot, comme les quarrés de toutes les lignes homologues de ces figures.* C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

303. Si les polygones semblables sont réguliers, le théorême n'en sera pas moins vrai dans toutes ses parties ; il le sera encore également, quel que soit le nombre des côtés de ces polygones réguliers semblables ; donc, il aura encore lieu si le nombre de ces côtés est infini ; d'où il suit que *les cercles*, considérés comme des polygones réguliers semblables d'un nombre infini de côtés, *sont entre eux pour leurs surfaces comme*

les quarrés de leurs rayons, comme les quarrés de leurs diametres, ou comme les quarrés des cordes d'un même nombre de degrés, ou encore comme les quarrés de leurs circonférences, ou enfin comme ceux des arcs d'un même nombre de degrés.

COROLLAIRE II.

304. Puisque les aires des figures semblables sont entre elles comme les quarrés des côtés ou lignes homologues, et que ces mêmes quarrés sont entre eux comme les cercles dont ces côtés homologues seroient les rayons ou les diametres; il s'ensuit que *les aires de différents cercles sont entre elles comme les figures semblables, faites sur leurs rayons, ou leurs diametres, ou leurs cordes d'un même nombre de degrés.* Ce corollaire sert de base à l'addition et à la soustraction des figures semblables de tant de côtés que l'on voudra, régulieres ou irrégulieres. Il sert également à trouver des figures qui aient avec d'autres des rapports déterminés quelconques, à quoi se réduit la multiplication ou division des surfaces.

SCHOLIE.

305. On tire encore de ce théorême une nouvelle démonstration de la 47ème d'*Euclide*. Si l'on se rappelle qu'une perpendiculaire DF, abaissée du sommet d'un triangle rectangle AFB (*fig.* 102) sur sa base AB, le divise en deux triangles aussi rectangles semblables entre eux et au grand triangle; et que nous venons de démontrer que les triangles semblables sont

comme les quarrés de leurs côtés homologues, on aura $\overline{ADB} : \overline{AFD} : \overline{DFB} :: \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2 : \overline{BD}^2$; donc, puisque le premier triangle vaut à lui seul les deux autres, le premier quarré sera aussi égal à la somme des deux autres. Passons à la résolution de quelques problêmes qui dépendent des principes que nous venons de développer.

PROBLÊME I.

306. *Etant données plusieurs lignes* M, N, O *pour les côtés homologues de plusieurs figures semblables; trouver le côté correspondant d'une nouvelle figure égale à celles-ci prises ensemble.* (*fig.* 114.).

SOLUTION.

Puisque les figures semblables sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, il est visible que tout se réduit à trouver le côté d'un quarré égal à lui seul aux différents quarrés construits sur les lignes données. Cela posé, ayant fait un angle droit GAL, dont les côtés soient d'une longueur indéfinie, sur chacun de ces côtés, on prendra des parties AC, AB respectivement égales aux deux premieres lignes données M, N; ensuite on portera l'hypoténuse BC de A en D, et l'on prendra sur AL, AF, égale à la troisieme ligne donnée O; et la ligne DF sera celle qui satisfait à la question, comme il est évident à cause des triangles rectangles BAC, DAF; dont, le dernier donne $\overline{DF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AF}^2$, à cause du premier

dans lequel on a $\overline{BC}^2$ ou $\overline{AD}^2$ (*constru.*) = $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$. C. Q. F. T. et D.

SCHOLIE.

307. Si la valeur des lignes M, N, O étoit exprimée en nombres, et que l'on demandât aussi en nombres le côté d'une figure égale aux trois figures construites sur les lignes données M, N, O; on feroit la somme des quarrés des nombres qui désignent ces mêmes lignes, et la racine de cette somme seroit le nombre de parties d'une même échelle que doit contenir la ligne demandée. Supposons, par exemple, qu'on voulût résoudre la question suivante.

On a trois bassins circulaires de même profondeur dont les rayons sont entre eux, comme les nombres 7, 11, 15; on demande le rayon d'un bassin de même profondeur qui contienne autant d'eau que les trois autres réunis.

Ajoutez les quarrés de ces trois nombres, et de leur somme 395, tirez la racine à $\frac{1}{10000}$ d'unité près, cette racine sera le rayon du cercle qui satisfait à la question.

On s'y prendroit de même s'il s'agissoit de trouver une figure égale à la différence de deux figures semblables données. Ainsi, pour avoir le rayon d'un cercle égal à la différence des deux cercles, dont CB et CP sont les rayons (*fig.* 121, *bis*), ayant élevé par le point P l'ordonnée PM, terminée à la circonférence du plus grand des deux cercles, cette ligne sera le

rayon du cercle demandé; car à cause du triangle rectangle CPM, on a $\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2$; donc, en ôtant $\overline{CP}^2$ de chaque membre, on aura $\overline{CM}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{PM}^2$, ou à cause que les cercles sont comme les quarrés de leurs rayons, et que CM = CB, *cer.* PM = *cer.* CA — *cer.* CP. On voit donc comment il faut s'y prendre pour calculer la surface de la mardelle d'un puits, qui n'est autre chose que la différence de deux cercles concentriques dont les rayons sont toujours donnés. S'il est question de cuber la maçonnerie de ce puits sur telle profondeur que l'on voudra, il n'y aura qu'à multiplier cette surface par le nombre de toises, pieds et pouces qui expriment cette profondeur.

PROBLÊME II.

308. *Trouver une figure semblable à une autre d'espece donnée, et qui ait avec elle un rapport déterminé* (*fig.* 115).

ANALYSE ET SOLUTION.

Soit $m : n$ le rapport de la figure demandée à la figure proposée; et soit AB la ligne ou le côté connu de la figure donnée, dont on demande le côté correspondant et inconnu, que nous supposerons égal à AG. Puisque les figures semblables sont toutes entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, et que ces mêmes figures sont aussi par l'hypothese dans le rapport de *m*

à n, il s'ensuit que l'on aura $m : n :: \overline{AG}^2 : \overline{AB}^2$; donc $\overline{AG}^2 = \frac{m}{n}\overline{AB}^2$; et si l'on met cette égalité en proportion, on aura $AB : AG :: AG : \frac{mAB}{n}$; d'où il suit que la ligne inconnue AG est moyenne proportionnelle entre la ligne donnée AB et une autre ligne exprimée par $\frac{mAB}{n}$; c'est-à-dire qui seroit avec la ligne donnée AB dans le rapport donné. Ainsi, assignant cette moyenne proportionnelle, le problême est résolu géométriquement. C. Q. F. T. et D.

COROLLAIRE I.

309. Si l'on veut résoudre le même problême arithmétiquement, l'équation $\overline{AG}^2 = \frac{mAB}{n}$ donne, en tirant la racine de chaque membre, $AG = AB\sqrt{\frac{m}{n}}$; d'où il suit qu'il n'y a qu'à multiplier la ligne donnée AB par la racine quarrée du rapport, et le produit sera la valeur de la ligne cherchée mesurée sur une même échelle de parties égales. Si, par exemple, on me demandoit de trouver le rayon d'un cercle qui fût à un autre d'un rayon donné de 15 pieds, dans la raison de 9 à 5; je multiplierois le nombre 15 par la racine de la fraction $\frac{9}{5}$, calculée à un dix millieme d'unité près, et l'on auroit, pour la valeur du rayon demandé, $20,1246 = 20^{p}\ 1^{po}\ 5^{lig}$.

COROLLAIRE II.

310. On voit donc que ce qui se fait géométrique-

ment par les moyennes proportionnelles s'opere numériquement par les racines quarrées. Si, dans le rapport donné de m à n, l'antécédent est supposé plus grand que le conséquent, le problême fait trouver une figure plus grande que la proposée, et l'opération revient à une multiplication, prise dans l'idée attachée au mot qui exprime cette même opération. Si au contraire l'antécédent est plus petit que son conséquent, la solution fait trouver une figure plus petite que la figure proposée, et l'on a fait une véritable division, suivant l'acception ordinaire de ce terme. On voit donc que ces deux opérations se font absolument de la même maniere, soit géométriquement, soit numériquement; et c'est ce qui doit être, si l'on fait bien attention que *la multiplication comme la division n'ont pas d'autre but ni d'autre effet que d'assigner une quantité qui soit à une autre dans une raison donnée.*

COROLLAIRE III.

311. Si les termes du rapport donné de m à n, ne sont pas des quarrés parfaits, ou s'il n'y en a qu'un des deux; il sera impossible à l'arithmétique d'assigner rigoureusement le côté de la figure demandée, tandis que la géométrie pourra toujours le déterminer exactement par une moyenne proportionnelle; ce qui nous a fait dire ci-dessus que la géométrie donne la valeur précise des racines de tous les nombres proposés.

COROLLAIRE IV.

312. On voit encore que la solution du pro-

blême précédent nous met en état de construire toute expression, telle que $\sqrt{\frac{3\overline{AB}^2}{5}}$, $\sqrt{\frac{5}{8}\overline{AB}^2}$, $\sqrt{\frac{m}{n}\overline{AB}^2}$, etc. ou leurs égales $AB\sqrt{\frac{3}{5}}$, $AB\sqrt{\frac{5}{8}}$, $AB\sqrt{\frac{m}{n}}$, etc. On construiroit aussi de la même maniere et avec la même facilité des expressions plus compliquées, telles, par exemple, que $\sqrt{(\frac{5}{7}\overline{AB}^2 \pm \frac{8}{15}\overline{AD}^2)}$, en combinant la derniere construction avec celles qui dépendent du triangle rectangle. Ces sortes de constructions sont d'un usage continuel dans la solution des problêmes de géométrie élémentaire, et font presque toute l'adresse de l'application de l'algebre à la géométrie pour la résolution des problêmes du second degré.

SCHOLIE.

313. C'est encore sur les principes que nous venons d'exposer qu'est fondée la construction de la ligne des plans sur le compas de proportion, comme sur le pantographe. Ces lignes servent à trouver sur le champ les côtés homologues de figures, ou de plans qui soient à d'autres dans des rapports donnés, avec la condition de leur être semblables. Pour vérifier ces sortes de lignes, il faut supposer la ligne prise pour unité divisée en un très grand nombre de parties égales, comme par exemple en 1000 ou 10000, et chercher par le calcul les racines de tous les nombres qui expriment les rapports demandés; ces racines portées sur la ligne des plans seront

les côtés homologues des figures qui auront, à la figure faite sur la ligne prise pour unité, les rapports demandés. On voit donc tout d'un coup que les lignes qui répondent aux points 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 et 100, doivent avoir pour expressions les nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, et 10. Appliquons ceci à un exemple.

Supposons que la ligne AB soit le rayon d'un cercle donné, et que l'on demande de trouver par le compas de proportion le rayon d'un cercle qui soit à celui-ci dans la raison de cinq à sept. J'ouvrirai le compas de proportion de manière que la distance des points 7, sur chaque ligne des plans, soit égale à la ligne donnée AB; le compas restant dans cette ouverture, si l'on prend avec le compas ordinaire la distance des points 5 sur la même ligne, elle sera le rayon du cercle demandé. On opéreroit de même pour toute autre figure, et pour tout autre rapport. On voit encore que cette même opération peut servir à extraire des racines quarrées, même des nombres qui ne sont pas des quarrés parfaits.

Enfin pour mettre les commençants à portée de mieux vérifier ces mêmes lignes, on trouvera à la fin de cet ouvrage une table des racines quarrées des cent premiers nombres naturels, calculées à sept décimales.

PROBLÊME III.

314. *Une figure quelconque* ABCDEF *et un point* a *sur le même plan étant donnés, mener par ce point une figure semblable à la proposée, et qui ait avec elle une raison donnée.*

SOLUTION.

Les figures semblables ayant tous leurs angles égaux, et leurs côtés proportionnels, il est visible que chaque côté du polygone cherché doit être parallele à celui qui lui répond dans le polygone proposé, et doit être égal à ce côté multiplié par la racine quarrée du rapport qui doit se trouver entre les polygones donné et demandé (n°. 309). Il n'y a donc qu'à chercher par le problême précédent la ligne *ab* correspondante à la ligne AB, et telle que le polygone dont elle sera le côté homologue, ait au polygone ABCDEF le rapport demandé; puis ayant tiré, par les extrémités de cette ligne et les angles A et B du polygone proposé, les lignes A*a*, B*b* qui se coupent en G; de ce point on menera à tous ces angles les diagonales GC, GD, GF, etc. et l'on tirera des paralleles à tous les côtés qui détermineront la figure cherchée; puisque ces deux polygones se trouveront composés d'un même nombre de triangles semblables. C. Q. F. T. et D.

PROBLÊME IV.

315. *Transformer un triangle* MNO (*fig.* 116) *en un autre triangle qui lui soit égal en surface, et qui soit semblable à un triangle donné* BAC.

SOLUTION.

Je prends d'abord sur AB une ligne AG égale à la base MO du triangle MNO; ensuite je cherche sur le côté AC un point D qui soit aussi élevé sur

AG, que le point N l'est sur MO; et je tire DG. Si cette ligne se trouvoit parallele à BC, le problême seroit résolu; puisque le triangle ADG est par construction égal au triangle MNO, et qu'il seroit semblable au triangle BAC. Supposons, comme cela est en effet, que la ligne DG n'est pas parallele à la ligne CB, et tirons par le point D la ligne DF parallele à cette même droite; il est visible que le triangle ADF est plus grand que le triangle ADG, et par conséquent aussi plus grand que le triangle demandé. Ce triangle aura donc une base plus grande que AG, et plus petite que AF. Supposons que cette base soit la ligne AL, et menons IL parallele à DF. Les triangles ADG, ALI, ont visiblement l'angle en A commun, et doivent être égaux; donc ils auront les côtés réciproques alentour de l'angle égal (n°. 258), et donneront AG : AL :: AI : AD; mais à cause des paralleles LI, DF, on aura AI : AD :: AL : AF; donc, puisque la suite des rapports égaux n'a pas été interrompue, on aura AG : AL :: AL : AF; d'où il suit que la ligne AL doit être moyenne proportionnelle entre AG et AF; et par conséquent le problême est résolu, puisque par cette construction les triangles ADG, AIL auront un angle égal compris entre côtés réciproques, et seront par conséquent égaux; mais le triangle ADG est égal à MNO; donc aussi AIL sera égal à MNO, et semblable à BAC, à cause des paralleles BC, IL. C. Q. F. T. et D.

SCHOLIE.

316. On s'y prendroit de la même maniere

pour transformer un triangle en une figure quelconque semblable à une figure proposée; en réduisant d'abord la figure donnée en un triangle qui lui fût égal en surface (par le n°. 145), puis cherchant un triangle semblable à celui-ci, égal au triangle donné, et réduisant ce triangle en un polygone semblable au premier polygone, par des lignes diagonales, et des lignes paralleles. Si le polygone est régulier, l'opération sera encore plus facile, et se déduira immédiatement de la derniere solution, et des propriétés générales des polygones réguliers. Nous laisserons aux commençants le plaisir de trouver par eux-mêmes les solutions de ces problêmes.

PROBLÊME V.

317. *Diviser une ligne donnée* AB (*fig.* 117, *pl.* 8) *en tel nombre de parties que l'on voudra, dont les quarrés soient entre eux dans une raison donnée.*

SOLUTION.

Supposons qu'il s'agisse de partager la ligne donnée AB en trois parties, dont les quarrés soient entre eux comme les lignes MP, MQ, MN. Il est visible que tout se réduit à trouver des lignes dont les quarrés soient entre eux dans les raisons données, et ensuite à partager la ligne AB dans le rapport de ces mêmes lignes, ce qui fournit tout d'un coup cette construction.

Sur la plus grande MN des lignes données, soit décrit un demi-cercle, et par les points P, Q, ayant élevé les ordonnées PR, QS, soient tirées les cordes MR, MS; on aura (n°. 258) $\overline{MR}^2$:

$\overline{MS}^2 : \overline{MN}^2 :: MP : MQ : MN$; il n'y a donc plus qu'à diviser la ligne AB en parties proportionnelles aux droites MR, MS, MN aux points D et F par le problême (du n°. 209), et le problême sera résolu. C. Q. F. T. et D.

PROBLÊME VI.

318. *Partager une figure quelconque en plusieurs autres figures qui lui soient semblables, et qui aient entre elles des raisons données.*

SOLUTION.

Supposons, pour fixer les idées (*fig.* 118), qu'il faille partager un cercle en plusieurs autres qui lui soient égaux en surface, et qui aient entre eux des rapports donnés. Ayant pris le diametre du cercle pour la ligne homologue des figures demandées, je commence par diviser cette ligne aux points D, F, G, de maniere que les parties AD, DF, FG et GB soient entre elles dans les raisons données; et je vois que la question se réduit à trouver des lignes dont les quarrés soient entre eux, comme ces parties dans lesquelles je viens de diviser le diametre AB. Puis donc que les quarrés des cordes d'un cercle qui ont toutes la même origine, sont entre eux comme les abscisses correspondantes, il est facile d'en conclure sur le champ la construction suivante. Ayant décrit sur AB comme diametre, une demi-circonférence; soient prises, à partir du point A, les lignes AK, AL, AH respectivement égales aux lignes DF, FG et GB; et par les extrémités

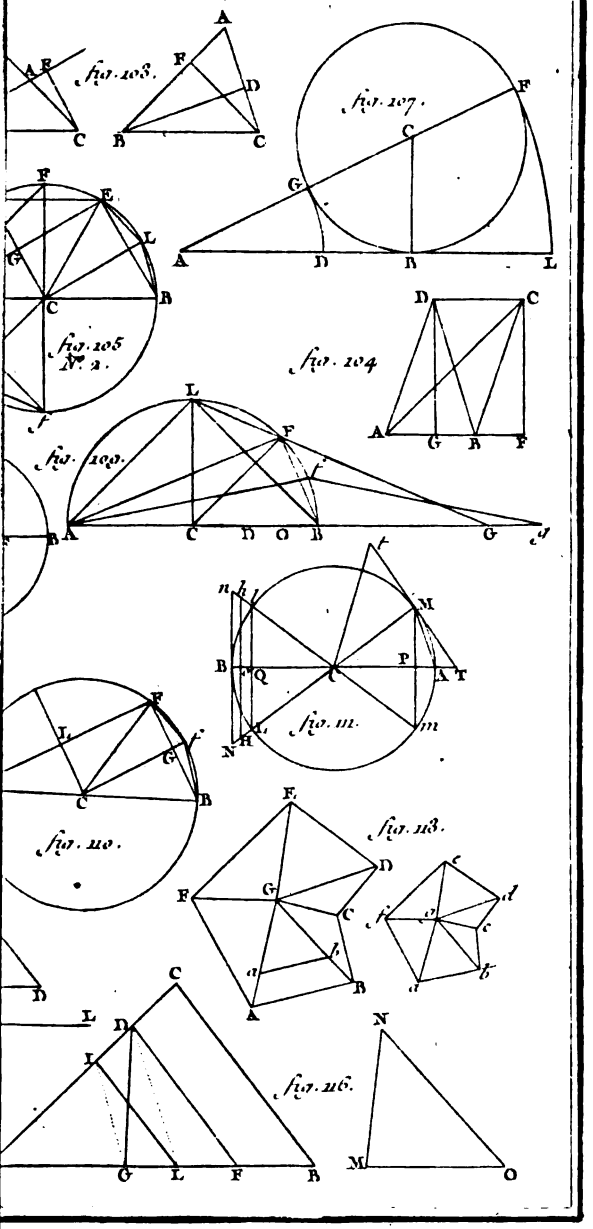


fig. 103.
fig. 107.
fig. 105 N°. 2.
fig. 104
fig. 109.
fig. 111.
fig. 110.
fig. 113.
fig. 116.

de ces lignes soient élevées les ordonnées D*d*, K*k*, L*l*, H*h*, et soient tirées les cordes A*d*, A*k*, A*l*, A*h*, qui seront les diametres des cercles demandés; ou des figures cherchées, si la figure proposée est une figure quelconque.

DÉMONSTRATION.

Puisque les figures semblables sont comme les quarrés de leurs côtés homologues, on aura cette suite de rapports égaux *cer.* AB : *cer.* A*d* : *cer.* A*k* : *cer.* A*l* : *cer.* A*h* :: $\overline{AB}^2$: $\overline{Ad}^2$: $\overline{Ak}^2$: $\overline{Al}^2$: $\overline{Ah}^2$; et par construction :: AB : AD : AK : AL : AH; ou encore :: AB : AD : DF : FG : GB; mais AB = AD + DF + FG + GB; donc aussi le cercle fait sur AB, ou toute autre figure, sera égal aux différents cercles ou aux figures semblables faites sur les lignes A*d*, A*k*, A*l*, A*h*; de plus, ces figures semblables seront entre elles comme les abscisses correspondantes qui sont dans le rapport demandé. On a donc rempli toutes les conditions du problême. C. Q. F. T. et D.

PROBLÊME VII.

319. *Un angle* GAF *et un point* D *étant donnés sur le même plan, mener par ce point une ligne qui retranche dans le même angle un triangle* BAL *égal en surface à un triangle donné* RSP (*fig.* 119).

ANALYSE

Par le point donné D, je mene une droite DN

parallele au côté AF de l'angle GAF, et terminée au côté AG prolongé s'il est nécessaire. Je fais ensuite un triangle DNO qui ait son sommet au point D, et qui soit égal en surface au triangle donné RSP. Cela posé, imaginant que la droite DLB satisfasse à la question, les triangles DNO, BAL étant égaux au même triangle RSP, l'un par construction, l'autre par l'hypothese, seront égaux entre eux; donc, puisqu'ils ont un angle égal, à cause de DN parallele à AF, ils auront les côtés réciproques alentour des angles égaux DNO et BAL; ce qui donne NO : AB :: AL : DN; mais à cause des mêmes paralleles les triangles BAL, BND sont semblables, et donnent AL : DN :: AB : NB; donc, puisque la suite des rapports égaux n'a pas été interrompue, on aura NO : AB :: AB : NB. Le problême est donc réduit à celui-ci : *Trois points* N, A, O, *étant donnés comme l'on voudra sur une ligne droite aussi donnée de position ; trouver un quatrieme point* B *tel que l'on ait* NO : AB :: AB : NB ou NA + AB. Occupons-nous donc de résoudre cette derniere question.

Pour y parvenir, je suppose encore le point B trouvé, et j'observe que la ligne AB est l'inconnue du problême, laquelle se trouve dans trois termes de la proportion; cherchons à avoir une nouvelle proportion dans laquelle il y ait deux termes de connus, et voyons si nous ne pourrions pas la construire par le moyen des sécantes intérieures ou extérieures à un cercle dont on pourroit assigner le diametre. Je vois sur le champ que par un *detrahendo* NO : AB — NO

:: AB : AN; car, quoique la ligne AB soit inconnue, il est aisé de reconnoître qu'elle est plus grande que NO, puisqu'elle est la base d'un triangle ALB, nécessairement moins élevé que le triangle NDO; je regarderai donc NO et AN, comme les extrêmes d'une proportion, dont AB et AB — NO sont les moyens, et dans laquelle les lignes NO et AB seroient deux sécantes extérieures: si donc je fais passer la sécante AB par le centre, AB — NO, qui exprime la partie extérieure de cette sécante, donnera NO pour le diametre du cercle demandé, ce qui fournit sur le champ cette construction.

CONSTRUCTION.

Sur la ligne NO, comme diametre, soit décrite une circonférence entiere; soit prise la ligne AO, que l'on portera de O en *a* sur cette même circonférence; puis, ayant fait *an* = AN, par le point *n*, ainsi déterminé sur *a* O prolongée, et le point C milieu de NO, soit tirée la ligne *ngb*; la ligne *nb* sera la valeur de la ligne AB que l'on demande; car à cause des sécantes extérieures *nb*, *n*O; *n*O : *ng* :: *nb* : *na*, ou par construction, NO : AB — NO :: AB : AN, et *componendo* NO : AB :: AB : NB. C. Q. F. T. et D.

PREMIER SCHOLIE.

300. On pourroit aussi résoudre le problême en prenant la ligne AB′ = *ng*, et tirant la ligne DB′L′ qui satisfait également à la question; car il est évident que l'on peut demander de tirer

par le point D une ligne qui retranche dans l'angle NAL′, opposé à l'angle GAF, et formé par les mêmes côtés prolongés, un triangle B′AL′, égal au même triangle RSP. Or, dans cette supposition, le triangle B′AL′ seroit encore égal au triangle DNO; et parceque ces triangles ont un angle égal, l'un en N, l'autre en A, ils auroient les côtés réciproques à l'entour de ces angles égaux, et donneroient NO : AB′ :: AL′ : DN, et, à cause des paralleles AL′ et DN, on a AL′ : DN :: AB′ : NB′; donc, on aura encore NO : AB′ :: AB′ : NB′ = NA — AB′; donc, NO : NO + AB′ :: AB′ : AN, ou à cause des sécantes extérieures au cercle dont NO est le diametre, *no* : *nb* :: *ng* : *na*, qui est précisément la proportion à construire.

Second Scholie.

321. Si le point donné D est dans l'angle GAF, il peut arriver que le problême devienne impossible; parceque, par un point donné, dans un angle donné, il y a un triangle plus petit que tous ceux que l'on pourroit former, en faisant passer une ligne droite par ce point donné. Si donc le triangle RSP étoit plus petit que ce plus petit possible, le problême n'auroit plus de solution. Occupons-nous encore de ce nouveau problême, qui n'en fait qu'un avec le précédent.

Soit donc un triangle DNO, égal au triangle donné RSP (*fig.* 122, *bis*), et supposons le triangle BAL égal à l'un ou à l'autre : à cause que ces triangles ont un angle égal, et sont égaux, ils auront encore les côtés réciproques alentour

de cet angle, et donneront NO : AB :: AL : DN; et à cause des triangles semblables BAL, BND, on aura AL : DN :: AB : NB; donc, aussi NO : AB :: AB : NB, ou AB — AN, ou *detrahendo*, NO : NO — AB :: AB : AN, ce qui fournit la construction suivante.

Sur AO, comme diametre, je décris une circonférence entiere; à partir du point A, j'inscris dans cette circonférence la corde $Ab = NO$, et du centre C de ce cercle, avec le rayon CN, je trace un nouvel arc de cercle qui coupe la corde Ab en deux points n et n'; enfin, prenant les lignes AB et AB', respectivement égales aux lignes An, An', et tirant, par le point D et les points B et B' ainsi déterminés, les lignes BDL, B'DL', on aura deux triangles BAL, B'AL', qui satisfont à la question: car tirant par le centre C et le point n, la ligne $anCg$, les sécantes intérieures Ag, Ao donneront $ng : no :: An : an$, ou en substituant leurs valeurs tirées de la construction, NO : NO — AB :: AB : AN. C. Q. F. T. et D.

Troisieme Scholie.

322. Si le cercle, décrit du point C comme centre, avec le rayon CN, ne fait que toucher la corde Ao, le problême n'aura qu'une solution; et dans ce cas le triangle seroit égal au plus petit triangle possible, parmi tous ceux qui seroient compris dans l'angle GAF, et qui auroient un côté assujetti à passer par le point donné D. Si le même arc de cercle, décrit avec le rayon CN, ne peut ni couper ni toucher la corde Ao, le

problême est impossible, et l'on en est averti par notre construction.

A l'égard de la détermination du plus petit triangle possible, dont on vient de parler, elle n'a aucune difficulté : ayant mené, par le point donné D, la ligne DN parallele à AF, on prendra NB égale à la ligne AN, et le triangle BAL (*fig.* 123, *bis*) sera le triangle demandé; comme il est aisé de s'en convaincre en tirant une droite quelconque *b*D*l*, et observant que le triangle LD*l* que l'on ajoute, sera toujours plus grand que le triangle BD*b* que l'on retranche, à cause qu'ils ont un angle égal compris entre côtés non réciproques, et que D*l* est plus grand que D*b*, ou réciproquement D*b* plus grand que D*l*.

Quatrieme Scholie.

323. Observons encore que le même problême est susceptible d'une solution beaucoup plus simple par une analyse différente. En effet, ayant construit dans l'angle GAF un parallélogramme AEFI égal au triangle RSP (*fig.* 120), et supposant le triangle BAL égal à ce même parallélogramme, et déterminé par une ligne qui passe par le point D; si, de ce triangle et du parallélogramme, on retranche le trapeze commun ALOE, il restera le triangle BOE égal au trapeze FOLI; mais à cause des paralleles AL, EF, les triangles BOE, DOF, DLI sont semblables, et donnent BOE : DOF : DLI :: $\overline{\text{BE}}^2$: $\overline{\text{DF}}^2$: $\overline{\text{DI}}^2$, et par conséquent *detrahendo* BOE : DOF — DLI :: $\overline{\text{BE}}^2$: $\overline{\text{DF}}^2 - \overline{\text{DI}}^2$; donc, puisque l'on a DOF —

DLI = BOE, on aura aussi $\overline{BE}^2 = \overline{DF}^2 - \overline{DI}^2$; ce qui fournit cette nouvelle construction.

Sur DF, comme diametre, soit décrit un demi-cercle DKF, dans lequel on inscrira une corde DK = DI; puis ayant tiré FK, on portera la longueur de cette ligne de E en B, ce qui donnera le point B que l'on demande, par lequel et le point D menant la ligne DB, on aura le triangle BAL égal au triangle proposé.

On s'y prendroit à-peu-près de même si le point D se trouvoit dans l'angle GA*f*, alors le problême sera toujours possible, tant que DF sera plus grand que DI; il n'aura qu'une solution si ces deux lignes sont égales, et il seroit impossible si DI est plus grande que DF.

PROBLÊME VIII.

324. *Trouver un point* G *au-dedans d'un triangle donné* BAC (*fig.* 121), *tel qu'en menant de ce point des lignes* GF, GL, GD, *qui fassent avec les côtés de ce triangle des angles égaux à un angle donné, ces mêmes lignes soient entre elles dans la raison de trois lignes aussi données* M, N, O.

ANALYSE.

Supposons pour un moment que le point G, pris à volonté, soit le point demandé, et qu'on ait mené les lignes GF, GL, GD faisant avec les côtés du triangle des angles égaux à l'angle donné, et qui soient entre elles dans les rapports donnés. Menons encore par le point G les lignes

GO, GP, paralleles aux côtés BC et AC, ainsi que les lignes GM, GN aussi respectivement paralleles aux côtés AB, AC, les triangles OLG, PDG, GLM, GFN seront respectivement semblables deux à deux, à cause des angles GLO, GDP égaux par la supposition, et des angles GOL et GPD aussi égaux entre eux, puisqu'ils sont chacun égal au même angle BCA pour les deux premiers, et BAC pour les deux autres. Comparant les côtés homologues de ces triangles, on aura GO : GP :: GL : GD, et GM : GN :: GL : GF. Mais les lignes GL et GD, GL et GF sont par hypothese dans des raisons données; donc, les lignes GO, GP, GM et GN seront aussi entre elles dans les mêmes raisons données; ce qui fournit la construction suivante.

CONSTRUCTION.

Soit fait un parallélogramme A*mfn* qui ait l'angle A commun avec le triangle BAC; et dont les côtés *fm*, *fn* soient entre eux, comme les lignes données M, N; et soit tirée la diagonale de ce même parallélogramme prolongée indéfiniment. Pareillement dans l'angle C du même triangle, soit fait un autre parallélogramme C*olp*, dont les côtés C*p* et C*o* soient dans la raison des lignes N et O, et soit prolongée sa diagonale C*b* jusqu'à ce qu'elle coupe la premiere en un point G; ce point sera celui qu'on demande.

DÉMONSTRATION.

Pour le prouver, du point G soient menées les lignes GF, GL et GD qui fassent avec ces côtés

côtés AB, AC et BC un angle égal à l'angle donné, et de plus par ce même point G, soient menées les lignes NGK, MGD, HGO, respectivement parallèles aux côtés AB, AC et BC du triangle BAC. Cela posé, à cause des triangles semblables AGM, A*fm*, on aura GM : *fm* :: AG : A*f*, et à cause des triangles AGN, A*fn* aussi semblables, on aura AG : A*f* :: GN : *fn*; donc, GM : *fm* :: GN : *fn*, ou *alternando* GM : GN :: *fm* : *fn*; mais les lignes *fm*, *fn* sont par construction dans la raison des lignes données M, N; on aura donc aussi GM : GN :: M : N; et parceque les triangles GMF, GNL sont semblables, ayant deux angles égaux chacun à chacun, on aura GF : GL :: GM : GN :: M : N; on fera voir de même que GL : GD :: N : O; donc, en rassemblant ces rapports, on aura GF : GL : GD :: M : N : O; d'ailleurs ces lignes font avec les côtés du triangle un angle égal à l'angle donné; donc, le point G trouvé, comme il a été dit, satisfait à toutes les conditions du problême.

Scholie.

325. Si l'on eût demandé de trouver un point G au-dehors du triangle, qui eût les mêmes conditions à l'égard des trois côtés de ce même triangle, on y seroit arrivé par une analyse absolument semblable; mais on observera que le problême seroit susceptible de trois solutions, suivant la position du point G, à l'égard du triangle: les commençants pourront s'exercer à cette recherche qui n'a aucune difficulté.

COROLLAIRE I.

326. Si l'on suppose que les trois lignes GF, GD, GL soient égales entre elles; le point G deviendra le centre d'un cercle qui touche les trois côtés du triangle, en supposant de plus que ces trois lignes égales soient perpendiculaires aux côtés du triangle, comme dans la *figure* 122, chacune étant le rayon du cercle inscrit au même triangle.

COROLLAIRE II.

327. Donc, pour trouver le centre G de ce cercle, il n'y a qu'à diviser deux angles quelconques A et C, chacun en deux également par des lignes AG et CG; le point d'intersection de ces lignes sera le centre demandé : car les parallélogrammes A*mfn*, C*plo*, de la *figure* 121, ayant dans les suppositions actuelles tous leurs côtés égaux, leurs diagonales A*f*, C*l* divisent les angles A et C, chacun en deux parties égales; ce qui peut d'ailleurs se conclure immédiatement de l'égalité des triangles AFG, ALG, qui ont leurs trois côtés égaux, chacun à chacun; savoir, AF et AL, parceque ces lignes sont deux tangentes; FG et GL, parcequ'elles sont rayons d'un même cercle : enfin, à cause que la ligne AG est un côté commun à ces deux triangles.

COROLLAIRE III.

328. On voit aussi ce qu'il faudroit faire, si l'on vouloit trouver le centre *g* d'un cercle qui touchât les trois côtés du triangle par dehors. Il n'y

auroit qu'à diviser l'angle BAC, et l'angle CB*f*, supplément de ABC, chacun en deux également; et le point *g* d'intersection de ces deux lignes sera le centre demandé. Car, supposant que le point *g* soit le centre que l'on cherche, et que les points *f*, *d*, *l* soient ceux où le cercle touche les côtés AB, BC et AC du triangle; les triangles A*fg*, A*lg*, seront égaux en tout, puisque A*f* = A*g*, à cause que ces lignes sont deux tangentes; *fg* = *gl*, puisque ces lignes sont deux rayons, et A*g* est un côté commun à ces deux triangles; donc la ligne A*g*, qui passe par le centre demandé, divise l'angle BAC en deux parties égales; on fera voir de même que la ligne B*g* divise l'angle *f*BC, supplément de ABC, en deux également, à cause de l'égalité absolue des triangles B*fg*, B*dg*.

COROLLAIRE IV.

329. Puisque dans un cercle les tangentes sont égales entre elles, on aura AF = AL, BF = BD et CL = CD. Le contour du triangle, qui est égal à la somme de toutes ces lignes, sera donc égal à 2 AF + 2 BF + 2 CD, et la demi-somme des trois côtés sera égale à AF + BF + CD. Je dis de plus, que la même demi-somme est égale à A*f*, ou, ce qui revient au même, que B*f* = CD. Car on a B*f* = B*d*, puisque ce sont deux tangentes, et de même C*l* = C*d* par la même raison; mais B*d* + C*d* = BC; donc aussi B*f* + C*l* = BC. Mettant, au lieu de B*f* et de C*l* leurs valeurs A*f* — AB, et A*l* — AC, ou A*f* — AC, à cause que A*l* = A*f*; on aura 2 A*f* — AB —

$AC = BC$; donc $Af = \frac{BC + AB + AC}{2}$; donc aussi $Bf = CD$.

COROLLAIRE V.

330. Il suit encore de là que la ligne Af est non seulement égale à la demi-somme des trois côtés, mais aux trois différences de chaque côté à la demi-somme. Car Bf est l'excès de la demi-somme sur le côté AB. AF sera l'excès de la même demi-somme sur le côté BC, puisque $BF = BD$, et que $Bf = DC$; enfin, BF est l'excès de la même demi-somme sur le côté AC, à cause que $AF + Bf = AL + CL = AC$.

OBSERVATION.

331. Remarquons, en passant, que si l'on a trois grandeurs quelconques, dont deux, prises comme on voudra, soient ensemble plus grandes que la troisieme, et que de leur demi-somme on retranche chacune en particulier; les trois différences ajoutées ensemble redonneront la même demi-somme. Il en seroit de même pour quatre quantités dont on prendroit le tiers de leur somme; les quatre différences de chacune au tiers de la somme, feront le même tiers de la somme; pour cinq quantités il faudroit prendre le quart; pour six quantités le cinquieme, et ainsi de suite. Si l'une des quantités est plus grande que la partie de leur somme dont on doit la retrancher, on prendra le reste avec le signe moins, et l'on ajoutera ces restes, tant positifs que négatifs, avec leurs signes; le résultat sera toujours la partie premièrement prise des quantités proposées.

COROLLAIRE VI.

332. Puisque les trois lignes GD, GF et GL, sont égales entre elles; il est visible que le

triangle BAC se trouve partagé en trois triangles AGB, BGC et AGC, qui ont même hauteur; et parceque chaque triangle est égal au produit de la moitié de sa base par sa hauteur, on aura AGB $= FG \times \frac{1}{2} AB$, AGC $= GL \times \frac{1}{2} AC$; BGC $= GD \times \frac{1}{2} BC$; donc le triangle total BAC, qui est égal aux trois derniers triangles dans lesquels il se trouve divisé, sera exprimé par $FG \times \frac{AB+BC+AC}{2}$, ou par $Af \times FG$ (n°. 330).

Corollaire VII.

333. Le dernier corollaire nous conduit à une maniere fort simple de trouver la surface d'un triangle dont on connoît les trois côtés, par la seule connoissance de ces côtés : car on vient de trouver BAC $= Af \times FG$; mais à cause des triangles semblables AFG, Afg, on a AF : FG :: $Af : fg$; donc $Af \times FG = AF \times fg$. Multipliant chaque membre par $Af \times FG$, on aura $\overline{Af \times FG}^2$, ou le quarré de l'aire du triangle $= Af \times FG \times fg \times AF$. Pour me débarrasser des rayons FG et fg, que je ne connois pas encore, je cherche si je ne pourrois pas trouver un rectangle sous des lignes connues, égal au produit de ces rayons FG et fg; et je vois que les triangles gfB, BFG sont semblables, puisqu'ils ont les côtés perpendiculaires les uns sur les autres; on aura donc $fg : Bf$ :: BF : FG; donc $FG \times fg = BF \times Bf$; donc en mettant ce produit à la place du produit des rayons, on aura, en tirant les racines de chaque membre, $Af \times FG$ ou BAC =

$\sqrt{(Af \times BF \times Bf \times AF)}$. Ce qui fournit le théorême suivant, qui est un des plus curieux de la géométrie-pratique.

L'aire d'un triangle quelconque est égale à la racine quarrée d'un produit de quatre dimensions fait de la demi-somme des côtés, par les trois différences de chaque côté à la même demi-somme.

COROLLAIRE VIII.

334. Il est facile maintenant d'avoir l'expression des rayons FG, *fg*, des cercles qui touchent les côtés du triangle par dedans ou par dehors. Car puisque nous avons $Af \times FG = \sqrt{(Af \times AF \times BF \times Bf)}$, on aura le rayon $FG = \frac{\sqrt{(Af \times AF \times BF \times Bf)}}{Af} = \sqrt{(\frac{AF \times BF \times Bf}{Af})}$.

On pourroit trouver de même l'expression du rayon *fg*, au moyen de ce que nous déja démontré que $Af \times FG = AF \times fg$; en divisant l'expression déja trouvée de l'aire du triangle par AF.

COROLLAIRE IX.

335. Si le triangle est isoscele, en supposant que AB et AC sont les côtés égaux entre eux, on aura l'aire du triangle égale à $\frac{CB}{2} \times \sqrt{(\overline{AB}^2 - \frac{1}{4}\overline{BC}^2)}$, qui n'est autre chose que la moitié de la base multipliée par la hauteur entiere du triangle; et si le triangle est équilatéral, on aura pour sa surface $AB \times \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

PROBLÊME IX.

336. *Connoissant les trois côtés d'un triangle* (*fig.* 123), *trouver le rayon du cercle circonscrit exprimé par la même mesure que celle des côtés.*

SOLUTION.

Supposant un cercle qui passe par les trois angles du triangle; soit tiré le rayon AG, et du point G la perpendiculaire GF au côté AC; enfin, soit menée du même point A la perpendiculaire AD sur BC. Je vois tout d'un coup que les triangles BAD, GAF sont semblables, puisqu'ils sont tous deux rectangles, et que l'angle B du premier est égal à l'angle G du second. On aura donc $AD : AB :: \frac{1}{2}AC : AG$; donc $AG = \frac{AB \times AC}{2AD}$; mais la perpendiculaire AD est égale à $\frac{2BAC}{BC}$; substituant cette valeur, on aura $AG = \frac{AB \times AC \times BC}{4BAC}$; c'est-à-dire que *le rayon du cercle inscrit est égal au produit des trois côtés, divisé par quatre fois l'aire du triangle.*

On voit donc comment on peut résoudre en nombres le problême que nous avons déja résolu géométriquement au n° 58.

CHAPITRE XII.

Des figures isopérimetres.

PROBLÊME I.

337. *COUPER une ligne* AB, *de maniere que le produit de ses deux parties soit le plus grand possible* (*fig.* 92, *pl. VI*).

SOLUTION.

Nous avons démontré que si cette ligne est coupée en deux parties inégales en D, et en deux parties égales en C, le rectangle des parties inégales AD × BD a pour expression $\overline{CA}^2 - \overline{CD}^2$; donc, tant que CD sera quelque chose, il faudra ôter son quarré de celui de la moitié de la ligne AB pour avoir le produit de ses deux parties inégales; donc ce produit sera le plus grand possible, lorsque cette ligne sera divisée en deux également. Cette vérité suit encore de ce que le quarré d'une ordonnée au cercle décrit sur une ligne quelconque comme diametre, est égal au produit des parties dans lesquelles elle divise le même diametre. C. Q. F. T. et D.

COROLLAIRE.

338. Donc, le plus grand rectangle que l'on puisse inscrire dans un triangle BAC est celui dont la hauteur est moitié de la perpendiculaire

abaissée du sommet de ce triangle sur sa base (*fig.* 1ere, *pl. VIII*, n° 2); car à cause des triangles semblables BAC, DAE, on aura AF : AG :: BC : DE; donc $DE = \frac{BC \times AG}{AF}$, et par conséquent $DE \times GF = \frac{BC}{AF} \times AG \times GF$; mais le rapport de BC à AF étant invariable, les différents rectangles inscrits au triangle BAC seront comme les rectangles AG × GF; donc, lorsque ce produit sera un plus grand possible, le parallélogramme inscrit sera aussi le plus grand possible.

THÉORÈME I.

339. *Si une ligne droite* DL (*fig.* 2) *touche une circonférence de cercle, et si de deux points déterminés* A *et* B, *pris sur cette circonférence, on mene aux différents points de cette ligne des droites, telles que* AD, BD; *je dis que celles qui aboutissent au point de contact en* F, *comme* AF *et* BF, *feront entre elles le plus grand angle possible.*

DÉMONSTRATION.

Ayant mené une droite AG du point A au point G où la ligne BD coupe la circonférence du cercle, on aura l'angle AGB extérieur au triangle AGD, équivalent aux deux intérieurs opposés ADG + DAG; donc ADG ou ADB = AGB — DAG; donc, tant que le point D ne sera pas confondu avec le point F où la tangente DL touche le cercle, il y aura quelque chose à retrancher de l'angle AGB = AFG pour

avoir l'angle D; donc, cet angle sera toujours moindre que l'angle AFB. C. Q. F. D.

PROBLÊME. II.

340. *Une droite* FG, *et deux points* A *et* B *hors de cette ligne étant donnés; on demande la position des lignes* AD, BD *menées de ces mêmes points à un point quelconque de la ligne* FG *pour que la somme de ces deux lignes soit la plus petite possible* (*fig.* 3).

SOLUTION.

Du point A abaissons sur la ligne donnée une perpendiculaire AF, et faisons FL = AF; je dis que la ligne BL coupera la ligne donnée au point D que l'on demande; car la ligne FG se trouvant, par construction, perpendiculaire au milieu de AL, passera par tous les points à égales distances des points F, L; donc on aura DL = AD, et ajoutant BD, on aura BD + DL, ou BL = AD + BD; mais la ligne BL est la plus courte que l'on puisse mener du point B au point L; donc BD + AD est aussi un moindre. Ce qui peut se démontrer encore plus particulièrement, si l'on prend un point *d* sur la ligne FG, et si l'on tire les lignes ponctuées A*d*, B*d* et L*d*; car on a A*d* = *d*L, donc ajoutant B*d* à chaque membre, on aura A*d* + *d*B = *d*L + *d*B; mais L*d* + *d*B est plus grand que BL; donc aussi A*d* + *d*B est plus grand que BL = AD + DB. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

341. On remarquera que la somme des lignes AD, BD, qui est la plus petite possible, est telle que les angles ADF et BDG sont égaux; car, BDG = FDL; or, FDL = FDA à cause des triangles FDL, FDA qui sont égaux en tout.

COROLLAIRE II.

342. Donc, si l'on demande de trouver la position de deux droites AD, BD, menées de deux points déterminés à une circonférence de cercle aussi donnée, et telle que cette somme soit un moindre; il faut trouver le point où ces lignes feront des angles égaux avec le rayon mené du centre au point D que l'on demande. Car, supposant que ce point soit trouvé, et que l'on ait mené la tangente FDL (*fig.* 4), la somme des lignes AD, BD ne peut pas être la plus petite possible à l'égard du cercle qu'elle ne le soit aussi pour la ligne droite qui se confond avec la circonférence au point du contact; donc les angles ADF et BDG seront égaux; donc, en leur ajoutant les angles droits CDF, CDG, on aura aussi ADC = BDC.

COROLLAIRE III.

343. Donc, si l'on demande la position d'un point C au-dedans d'un triangle quelconque BAD, tel que la somme des trois lignes AC, BC, DC, soit une moindre possible; les angles ACB, ACD, BCD doivent être égaux; mais ces

trois angles valent ensemble 360°; donc, chacun sera de 120°; donc, si sur les lignes AB, AD, on décrit des arcs de cercle capables d'un angle de 120°, le point où ces arcs se couperont sera celui que l'on demande.

THÉORÈME II.

344. *De tous les triangles* ADB, AFB *qui ont même base et un angle égal opposé à cette base, celui qui est isoscele est le plus grand possible* (*fig.* 6).

DÉMONSTRATION.

En effet, ayant décrit sur la base AB commune à tous ces triangles une portion de cercle capable de l'angle donné; il est visible que celui ADB qui a son sommet dans le point D où la perpendiculaire au milieu de AB coupe cette circonférence, est aussi celui dont la hauteur DG est la plus grande; donc, il est aussi plus grand qu'aucun autre. C. Q. F. D.

THÉORÈME III.

345. *De tous les triangles, ayant une base égale avec un angle égal opposé à cette base; ou, ce qui revient au même de tous les triangles que l'on peut inscrire dans une même portion de cercle* BAD; *celui qui est isoscele aura la plus grande somme possible de ses côtés ou le plus grand périmetre* (*fig.* 7).

DÉMONSTRATION.

Soit prolongé l'un des côtés BF d'un triangle

non isoscele, comme BFD de F en G, de maniere que l'on ait FG = DF, et soient encore tirées les droites AF, AG. Les deux triangles AFD, AFG seront égaux en tout; car les angles AFD et AFG sont égaux, le premier ayant pour mesure la moitié de l'arc ABD, et le second la demi-somme des arcs AF et BDF, puisque ce dernier est formé par une corde AF, et par une ligne FG, qui prolongée coupe la circonférence en B (art. 93); mais AF + BDF = AFD + BD = AB + BD, à cause que BAD est isoscele par hypothese; donc, les angles AFD, AFG sont égaux; d'ailleurs, ces mêmes angles sont compris entre côtés égaux (*par construc.*); donc, AG = AD; donc BA + AG = AB + AD; mais AB + AG est de toute nécessité plus grand que BG = BF + FG = BF + FD; et comme la démonstration sera la même pour tout autre triangle non isoscele, il s'ensuit que le triangle isoscele BAD est celui qui a le plus grand périmetre. C. Q. F. D..

THÉORÊME IV.

346. *De tous les triangles qui ont même base et une même somme pour celle des deux autres côtés, le triangle isoscele* ACB *est celui qui a le plus de surface* (*fig.* 8).

DÉMONSTRATION.

Ayant construit sur AB un triangle ADB, dont la somme des côtés soit égale à la somme donnée des côtés variables AC, CB, AD et DB, et mené la droite DF parallele à AB, qui coupe

en un point G la perpendiculaire au milieu de AB, et tiré les lignes AG et GB; les angles AGF et BGD seront égaux; donc (n°. 340) la somme des lignes AG + GB sera moindre que celle des lignes AD et BD; donc le sommet C du triangle isoscele ACB doit être au-dessus de la ligne DF; donc le triangle ACB aura une plus grande hauteur que tout autre triangle comme ADB; donc ce triangle est aussi le plus grand de tous ceux qui ont même base et même somme de leurs côtés. C. Q. F. D.

THÉORÈME V.

347. *De tous les triangles qui ont même surface avec un angle égal opposé à leur base, celui qui est isoscele a la plus petite base (fig. 9).*

DÉMONSTRATION.

Ayant construit un triangle isoscele BAD égal en surface à celle donnée, et dont l'angle A soit aussi égal à l'angle proposé; soit inscrit ce même triangle dans un cercle, et soient tirées les cordes quelconques BG et GD qui donnent un triangle BGD. Ce triangle, n'étant pas isoscele, sera moindre que le triangle BAD (n°. 344); donc, si on retranche de part et d'autre le triangle commun BOD, on aura BOG plus petit que AOD; donc, si l'on veut former un nouveau triangle égal en surface au triangle BAD, ayant toujours son angle G égal à l'angle BAD, il faudra prolonger BG indéfiniment vers E, de maniere que le triangle BDE soit égal à la différence des triangles AOD et BOG; mais, dans ce nouveau triangle, l'angle

EBD étant obtus, comme supplément de GBD, est plus grand que l'angle BED; donc le côté DE opposé à cet angle est plus grand que BD; donc le triangle isoscele parmi tous les triangles de même surface avec un angle égal opposé à leurs bases est celui qui a la plus petite base. C. Q. F. D.

PROBLÊME III.

348. *Par un point* D *donné de position dans un angle* BAC *aussi donné, mener une ligne qui retranche au-dedans du même angle le plus petit triangle possible* (*fig.* 10).

SOLUTION.

Ayant mené par le point D la ligne DE, parallele à AC, et pris EF = AE; la ligne FDG sera celle que l'on demande. Pour le démontrer, soit menée une autre ligne quelconque *f*D*g*, et par le point G soit tirée une droite GL parallele à AB; les triangles DF*f*, DGL seront égaux en tout, ayant deux angles égaux chacun à chacun sur des bases égales; mais le triangle DG*g* est visiblement plus grand que DGL; donc le triangle *f*A*g* est plus grand que FAG; et comme on démontrera la même chose pour tout autre triangle différent de ce même triangle FAG, il s'ensuit qu'il est le plus petit de ceux compris dans l'angle BAC, et qui ont pour base une ligne qui passe par le point donné D.

THÉORÊME VI.

349. *De tous les polygones rectilignes d'un même nombre de côtés et inscrits au même cer-*

cle, celui ABDEF *dont tous les côtés sont égaux, est le plus grand en surface* (*fig.* 11).

DÉMONSTRATION.

Ayant tiré une diagonale quelconque AE, si le polygone ABDEF est le plus grand possible, comme on le suppose; il faut que le triangle AFE soit aussi plus grand qu'aucun autre triangle AGE, inscrit au même segment et sur la même corde AE; mais pour que ce triangle soit le plus grand possible, il doit avoir ses côtés AE, EF égaux entre eux. On fera le même raisonnement pour un autre quadrilatere et un autre triangle correspondant; donc, *de tous les polygones d'un même nombre de côtés inscrits au même cercle, le plus grand en surface est celui qui a tous ses côtés égaux.* C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

350. Il suit de ce théorême et du (n°. 345) que le contour d'un polygone régulier est plus grand que celui de tout autre polygone irrégulier du même nombre de côtés, et inscrit au même cercle.

THÉORÊME VII.

351. *De toutes les figures rectilignes qui ont le même nombre de cotés et même contour, celle* ABDEF *dont tous les côtés sont égaux, est la plus grande* (*fig.* 11).

DÉMONSTRATION.

Si la figure ABDEF est la plus grande de toutes celles

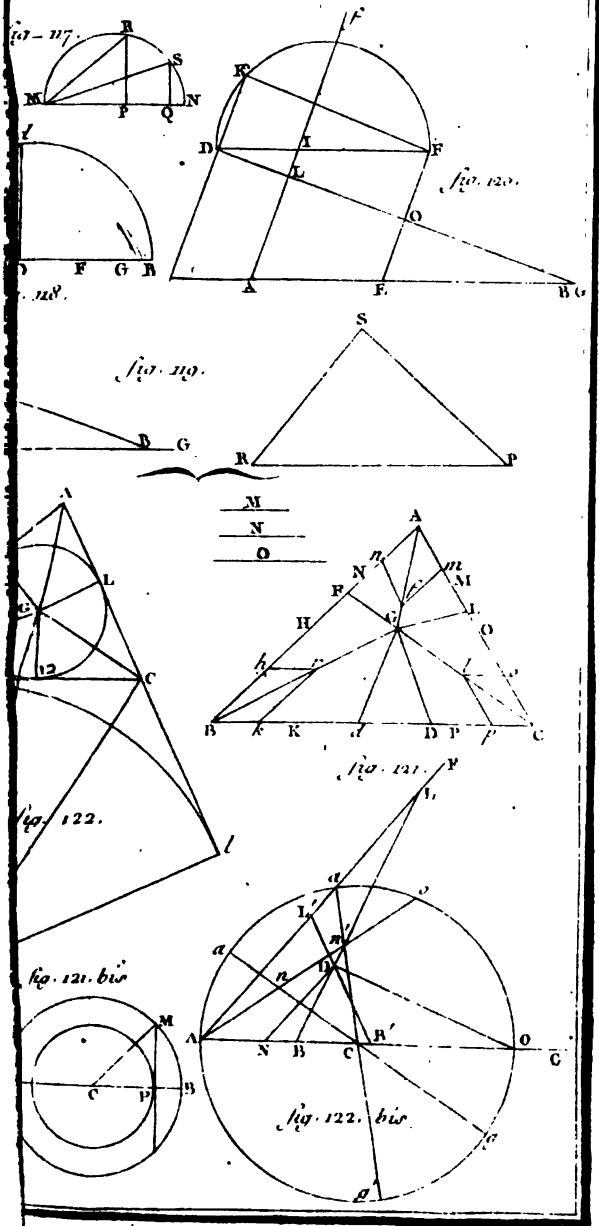


fig. 117.
fig. 118.
fig. 120.
fig. 119.
fig. 121.
fig. 122.
fig. 121. bis
fig. 122. bis

celles qui ont le même contour, un quelconque de ses triangles, comme AFE, doit aussi être le plus grand possible : mais le plus grand triangle, lorsque la base et la somme des côtés sont la même, est celui qui est isoscele (n° 345); donc EF = AF; on fera voir de même que BD = AB, et ainsi des autres; donc, etc. C. Q. F. D.

THÉORÈME VIII.

352. *Le plus grand triangle compris entre deux lignes données de grandeur, et une troisieme qui joint leurs extrémités, est celui dans lequel ces deux lignes forment entre elles un angle droit* (*fig.* 12).

DÉMONSTRATION.

Soient les deux lignes données CA et CD; ayant décrit du point C comme centre avec le rayon CA une demi-circonférence GDB*d*, et mené D*d* parallele à AC avec CB perpendiculaire à la même droite AC qui coupe D*d* en F; la ligne CF mesurera la hauteur des triangles ADC, A*d*C; mais cette ligne est plus courte qu'aucune des obliques CD, C*d*, et aussi que CB; donc le triangle ACB est le plus grand de tous ceux qui ont même base avec un côté égal CD ou CB. C. Q. F. D.

THÉORÈME IX.

353. *Si tous les côtés d'un polygone* ABDEFG *sont donnés de grandeur, excepté le dernier qui joint les deux extrêmes, et qu'on demande quelle doit être leur position respective pour qu'ils for-*

ment le plus grand polygone possible ; je dis qu'elle doit être telle qu'ayant mené, des extrémités du dernier côté à l'un quelconque E *des angles du polygone, des droites* AE, GE ; *ces deux lignes forment entre elles un angle droit* (*fig.* 13).

DÉMONSTRATION.

Car, soit le polygone ABDEFG un plus grand possible, et dans lequel cependant les lignes AE, GE ne comprennent pas un angle droit ; formez avec les mêmes lignes un angle droit *aeg;* ensuite, sur *ae* et sur *eg*, faites le quadrilatere *abde*, et le triangle *efg*, respectivement égaux aux quadrilateres ABDE et au triangle EFG ; à cause que le nouveau triangle *aeg* est plus grand que le triangle AEG par le théorême VII, en leur ajoutant les surfaces égales par construction ; il s'ensuivra que le polygone *abdefg* sera plus grand que le polygone ABDEFG ; ce qui est contre l'hypothese ; donc, la position des côtés du même polygone doit être telle que tout angle, comme AEG, soit un angle droit. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

354. Puisque tout angle qui a son sommet dans la circonférence, et qui est appuyé sur le diametre, est droit ; il suit que la plus grande figure rectiligne que l'on puisse décrire avec un nombre de côtés donnés, et une derniere indéterminée qui joigne les côtés extrêmes, est celle qui est inscrite au demi-cercle, et dont le diametre est cette même ligne indéterminée.

THÉORÈME X.

355. *Un polygone* ABCDEF *inscrit au cercle est plus grand que toute autre figure* abcdef *non inscrite, et faite avec ces mêmes côtés* (*fig.* 14).

DÉMONSTRATION.

Par le centre du cercle auquel est inscrit le premier polygone et l'un quelconque de ses angles comme A, menez le diametre AG, et tirez les lignes ponctuées CG, DG, AE, GE; et dans le polygone non inscrit par l'angle *a* compris entre les côtés *ab*, *af* égaux aux côtés AB, AF, menez la ligne *ag;* puis, sur *cd,* faites le triangle *cgd* égal en tout au triangle CGD. Cette construction bien entendue, il est évident, par le théorême VIII, que le polygone AFEDG inscrit est plus grand que *afedg* non inscrit; et de même le quadrilatere inscrit ABCG est plus grand que le quadrilatere correspondant *abcg* formé avec les mêmes côtés et non inscrit; donc la figure totale ABCGDEF est plus grande que la figure isopérimetre *abcgdef,* formée avec les mêmes côtés; donc, en retranchant de part et d'autre les triangles CGD, *cgd*, égaux en tout par construction, on aura ABCDEF plus grand que la figure *abcdef* de même contour, et faite avec les mêmes côtés. C. Q. F. D.

THÉORÈME XI.

356. *De tous les polygones qui ont le même périmetre et le même nombre de côtés, celui dont*

tous les angles et tous les côtés sont égaux, est aussi celui qui a la plus grande surface.

DÉMONSTRATION.

On vient de voir au dernier théorême que de tous les polygones qui ont le même périmetre, celui qui est inscrit au cercle est celui qui est le plus grand par le (n° 345); de tous les polygones inscrits au même cercle qui ont le même périmetre et le même nombre de côtés, le plus grand est celui dont tous les côtés sont égaux; donc, en réunissant ces deux considérations, le polygone qui sous un contour donné a le plus de superficie possible, est celui dont tous les angles et dont tous les côtés sont égaux. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

357. Observons que lorsque le contour et le nombre des côtés d'une figure irréguliere sont donnés, pour qu'elle ait le plus de surface possible, il suffit qu'elle soit disposée de maniere que tous ses angles soient dans la circonférence d'un même cercle, quelle que soit la disposition respective de ses côtés. Car soit ABDEG, une figure dont les côtés sont donnés (*fig.* 11), et d'ailleurs la plus grande possible en tant qu'elle est inscrite dans un cercle, on pourra former le triangle AG'E égal au triangle AGE, en menant par le point G une droite GG' parallele à AE, et tirant les lignes AG', G'E qui seront respectivement égales aux lignes GE, AG. On voit donc que les deux figures ont encore la même surface, et par conséquent la plus grande possible,

quoique l'on ait changé l'ordre des côtés qui les comprennent.

Tout ce chapitre est tiré presque mot pour mot de la géométrie de M. *Simpson;* mais j'ai cru rendre service aux jeunes géometres de le joindre ici, parceque la traduction françoise qui en a été faite est défigurée par un grand nombre de fautes, et de plus parceque cette théorie peut être utile aux architectes, pour tirer le plus grand parti possible d'un terrain ou d'un contour donné. Ceux qui seroient curieux de suivre cette recherche plus en grand peuvent consulter un ouvrage excellent dans ce genre, publié il y a quelques années par M. *Lhuillier,* géometre distingué de Geneve et professeur de mathématiques à Varsovie.

OBSERVATION.

On pourroit craindre que notre démonstration du théorême V ne fût incomplette, parceque l'on pourroit former un triangle D*ge* dont l'angle DB*e* fût aigu; mais il est aisé de voir que dans ce triangle le côté D*e* sera encore plus grand que DB; car ayant mené par le centre C le diametre DCL et décrit du point D comme centre avec le rayon DG un arc de cercle qui coupe la circonférence en *g*; les triangles DGE, D*ge* ayant un côté égal, un angle égal, et devant être égaux, donneront DG × GE = D*g* × *ge*; donc *ge* = GE et portant D*e* = DE; mais DE a été démontré plus grand que DB; donc aussi D*e* est plus grand que DB.

LIVRE TROISIEME.

Des Éléments de Géométrie.

CHAPITRE PREMIER.

Des plans et de leur rencontre entre eux, ou avec d'autres plans; des angles solides; des corps ou solides; maniere de mesurer leurs surfaces et leurs volumes.

358. Nous avons déja dit qu'un plan est une surface à laquelle on peut appliquer une regle dans toutes sortes de directions, ou une surface formée par le mouvement d'une ligne droite dont toutes les parties s'avancent de front, ou parallèlement à elles-mêmes le long d'une autre ligne. La considération des plans et de leurs rencontres les uns avec les autres, est une des parties les plus intéressantes de la géométrie-pratique. Les surfaces d'un grand nombre de corps sont terminées par des plans. Les *angles solides* des mêmes corps sont formés par la rencontre de plusieurs plans qui se coupent et se terminent à un même point. C'est par le moyen des plans différemment combinés que l'on vient à bout de déterminer les développements des dif-

férents corps, les différentes figures qui résultent de leur pénétration mutuelle; les panneaux par lesquels plusieurs solides doivent se réunir et s'assembler pour paroître ne former qu'un seul tout; ce qui constitue l'art de l'appareil, et ce qui est également nécessaire dans la coupe des bois, soit pour la charpente, soit pour la menuiserie. C'est encore par le secours de différents plans que la géométrie donne des regles précises pour mettre les objets en perspective, et nous séduire par une illusion aussi agréable dans ses effets que certaine dans ses principes, et dans les regles dont elle fait usage. L'art de tracer des cadrans sur toutes sortes de surfaces n'est encore qu'une conséquence de la théorie des plans. On ne peut donc trop s'appliquer à bien saisir le peu que nous en donnerons, parcequ'il sert de base à tout ce que nous aurons à démontrer par la suite.

On trouve, dans la plupart des éléments de géométrie, un grand nombre de propositions démontrées dans toute la rigueur possible, et que nous croyons qu'il suffit d'énoncer pour en concevoir sur le champ la vérité. Telles sont les propositions suivantes qui ont un rapport marqué avec les propositions semblables sur les lignes.

359. *Par une ligne droite on peut faire passer une infinité de plans*, de même que par un plan on peut faire passer une infinité de lignes droites.

COROLLAIRE I.

360. Donc une ligne droite ou deux points

quelconques ne peuvent suffire pour déterminer la position d'un plan ; mais trois points peuvent la fixer essentiellement. Car, en menant à ces points trois lignes, elles forment un triangle qui est nécessairement une surface plane. Donc, si par trois points donnés au-dessus ou au-dessous d'un plan quelconque, on fait passer un autre plan, ce dernier sera donné de position à l'égard du premier.

COROLLAIRE II.

361. *L'intersection commune de deux plans est une ligne droite;* car les plans n'ayant pas d'épaisseur, leur commune section ne peut en avoir aucune. De plus, si l'on prend deux points dans cette commune section, la ligne droite qui passera par ces deux points, sera toute entiere dans chacun de ces deux plans suivant la définition des plans. Donc la commune section de deux plans est une ligne droite.

COROLLAIRE III.

362. Donc deux lignes droites paralleles sont dans un même plan, et deux lignes droites qui se coupent sont aussi dans un même plan. Car en prenant un point sur chacune de ces dernieres, et joignant ces deux points par une troisieme droite, on aura un triangle dont le sommet sera au point d'intersection de ces lignes droites ; donc les droites qui se coupent, et qui sont les côtés de ce triangle, sont dans un seul et même plan.

DÉFINITION.

363. *Une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* MN (*fig.* 124), *lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les lignes qu'on peut mener par son pied* B *dans le même plan* MN.

COROLLAIRE I.

364. Donc, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire AB d'un même point A à un plan MN; car, si l'on en pouvoit mener une seconde, il faudroit que d'un même point on pût mener deux perpendiculaires à une même droite, ce qui est impossible.

COROLLAIRE II.

365. Donc réciproquement, par le même point B d'un plan MN, on ne peut élever à ce plan qu'une seule perpendiculaire AB. Car si l'on pouvoit en mener une autre, il faudroit aussi que par le même point d'une droite quelconque, et dans un même plan, on pût élever deux perpendiculaires à cette droite, ce que nous avons vu être impossible (n°. 52).

THÉORÈME I.

366. *Si une ligne droite* AB *est perpendiculaire à deux droites quelconques* CD, EF *qui passent par son pied* B *dans un plan* MN, *elle sera aussi perpendiculaire à toute autre droite, comme* GH *tracée dans le même plan, et qui passe par le même pied, et sera par conséquent perpendiculaire au plan* MN.

DÉMONSTRATION.

Soient prises les lignes BC, BD, BE, BF, toutes égales entre elles, et soient tirées les lignes AC, AD; AE, AF; AG, AH. Cela posé, il est visible que les triangles CBE, FBD sont égaux en tout, puisqu'ils ont les angles en B égaux et compris entre côtés aussi égaux (*par construction*). Donc les triangles CBG, DBH seront aussi égaux en tout; les angles en B étant égaux de part et d'autre, puisqu'ils sont opposés au sommet, et les angles BCG, BDH étant aussi égaux à cause qu'ils appartiennent à des triangles égaux en tout. Donc, puisque ces angles égaux sont sur des bases égales, le triangle CBG sera égal en tout au triangle DBH; donc on aura GB = BH. Le point B est donc déja à égale distance des extrémités de la droite GH: reste à faire voir que le point A est aussi également éloigné des mêmes points, ce qui est très facile; car les triangles FAD, CAE sont égaux en tout, par construction; donc les triangles ADH, ACG le seront aussi à cause des angles égaux ADH, ACG compris entre les côtés AD, DH, respectivement égaux aux côtés CA, CG: donc on aura AH = AG; donc la ligne AB a deux points à égales distances des points G et H; donc elle est perpendiculaire sur GH; d'ailleurs la droite GH est une ligne quelconque qui passe par son pied; donc AB est perpendiculaire au plan MN. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

367. La ligne AB étant perpendiculaire à

toutes les droites tracées dans le même plan, et qui passent par son pied, est aussi plus courte qu'aucune des obliques menées du même point A au plan MN; ainsi une perpendiculaire abaissée d'un point quelconque sur un plan MN est la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener de ce point au même plan.

COROLLAIRE II.

368. Donc si trois droites quelconques BD, BH, BF (*fig.* 124), sont perpendiculaires au même point B d'une droite AB, ces trois lignes seront dans un même plan auquel la droite AB sera perpendiculaire. Car si l'une d'elles n'étoit pas dans le même plan que les deux autres, elle ne seroit pas perpendiculaire à la ligne AB, par le théorême présent.

PROBLÊME I.

369. *D'un point* A *hors d'un plan* MN (*fig.* 125), *mener à ce plan une perpendiculaire* AB.

SOLUTION.

Soient pris sur le plan MN trois points à volonté D, C, F à égales distances du point A, et faisons passer une circonférence de cercle par ces trois points; le centre de ce cercle sera le point où la perpendiculaire au plan MN doit rencontrer le plan; car elle doit avoir tous ses points à égales distances des points D, C, F. Donc, elle passe par le point B, centre du cercle

qui renferme les trois points pris à volonté. C. Q. F. T. et D.

Scholie.

370. Lorsque l'on veut résoudre ce problême d'une maniere très exacte dans la pratique, ce qui arrive souvent dans la gnomonique; c'est ici le cas de calculer le rayon du cercle par le moyen des trois côtés mesurés sur le plan le plus exactement qu'il est possible, au moyen d'un compas à verge et d'une échelle divisée de parties égales.

Problême II.

371. *Un plan* MN (*fig.* 126), *une droite* FD *sur ce plan, et un point* A *hors du même plan étant donnés; mener de ce point* A *une droite* AC *perpendiculaire à la droite* FD.

Solution.

Cherchez deux points D, F sur la ligne donnée à égales distances du point donné A, le point C milieu de DF sera celui où doit aboutir la perpendiculaire menée du point A à la droite DF, puisque cette ligne aura deux de ses points à égales distances des points D, F... C. Q. F. T. et D.

On pourroit aussi résoudre le même problême en abaissant du point A la perpendiculaire AB au plan MN, et menant du point B la droite BC perpendiculaire à DF, le point C sera celui où doit aboutir la perpendiculaire menée du point A à la droite FD.

COROLLAIRE I.

372. Donc, si une droite AC est oblique sur un plan MN, il n'y a qu'une seule ligne DF dans ce plan, à laquelle la droite AC puisse être perpendiculaire; car s'il y en avoit encore une autre dans ce plan à laquelle elle pût être perpendiculaire, elle ne seroit plus oblique au plan, mais perpendiculaire à ce même plan (par le n°. 366). On voit de plus ce qu'il faudroit faire pour trouver dans le plan MN une droite DF perpendiculaire à l'oblique AC donnée de position.

COROLLAIRE II.

373. Puisque l'angle BCD est droit, il suit que si du point B où aboutit une perpendiculaire abaissée d'un point A quelconque hors d'un plan MN sur ce même plan, on mene une droite BD terminée à quelque point D d'une droite DF, tracée sur le même plan, et qu'ensuite on décrive sur cette ligne comme diametre un demi-cercle, le point où la circonférence coupera la droite DF, sera celui où aboutit la perpendiculaire menée du point A hors le plan à la droite DF tracée sur le même plan.

COROLLAIRE III.

374. Donc, si d'un point A (*fig.* 127), pris au-dehors d'un plan, on mene à plusieurs droites CB, CD, CF, CG, etc. tracées dans ce plan, et qui passent par le même point C, des perpendiculaires AB, AD, AF, AG, etc. tous les points

B, D, F, G, etc. où aboutiront toutes ces perpendiculaires, seront dans la circonférence d'un cercle qui aura pour diametre la ligne CB menée du point C à celui où aboutit la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan; car en tirant les cordes BD, BF, BG, BI, les angles BDC, BFC, BGC seront droits, d'où il suit que les lignes AD, AF, AG, AI sont perpendiculaires aux lignes auxquelles elles se terminent.

PROBLÊME III.

375. *Par un point donné* A (*fig.* 128) *hors d'un plan* MN, *mener un autre plan parallele à celui-ci.*

SOLUTION.

Par le n°. 360, il faut trois points pour déterminer la position d'un plan à l'égard d'un autre plan. Tout se réduit donc à trouver encore deux points qui appartiennent au plan demandé. Pour cela ayant abaissé du point donné A la perpendiculaire AB au plan MN; par deux points quelconques D, F du même plan, je mene des droites indéfinies paralleles à AB, sur lesquelles je prends les parties DC, FE égales à la droite AB, et le plan qui passera par les trois points A, C, E sera le plan demandé parallele à MN. Car puisque les lignes AB, EF sont égales et paralleles, les lignes AE, BF seront aussi égales et paralleles: on fera voir de même que les lignes AC, BD sont aussi égales et paralleles, ainsi que les lignes CE et DF; donc le plan OP, qui renferme les trois premieres, est parallele au

plan MN qui renferme les trois autres. C. Q. F. T. et D.

N. B. Il n'est pas nécessaire, pour la solution du problême, que les trois lignes AB, CD, EF soient perpendiculaires au plan MN; il suffit seulement que ces lignes soient égales et paralleles entre elles.

Corollaire I.

376. Donc, si deux droites BD, BF, tracées sur un plan MN, sont paralleles à deux autres droites AC, AE tracées dans un autre plan OP; 1°. les angles DBF, CAE seront égaux; 2°. les plans MN, OP seront paralleles. Car ayant pris les lignes AC, AE respectivement égales aux lignes BD, BF, et tiré les droites AB, CD, EF, les figures ACDB, AEFB seront des parallélogrammes à cause des lignes AC, BD, AE, BF respectivement égales et paralleles, par la construction et par l'hypothese; les lignes AB, DC, EF seront donc aussi égales et paralleles; donc le triangle CAE est égal en tout au triangle DBF; donc, 1°. l'angle CAE est égal à l'angle DBF; 2°. les deux plans OP, MN sont paralleles, puisque les trois points C, A, E du premier sont respectivement également éloignés des points correspondants D, B, F du second.

Corollaire II.

377. Donc, si deux plans paralleles MN, OP sont coupés par un troisieme plan ABDC, les sections AC, BD de ces plans par le troisieme, seront des lignes paralleles. Car si ces lignes n'é-

toient pas paralleles, ce seroit signe que l'un des plans s'approcheroit de l'autre du côté où la section AC inclineroit sur BD.

DÉFINITION.

378. L'ouverture ou l'inclinaison de deux plans AD, AF (*fig.* 129), qui se coupent, forme ce que l'on appelle un *angle plan.*

PROBLÊME IV.

379. *Déterminer l'ouverture de deux plans qui se coupent; ou, ce qui revient au même, mesurer l'inclinaison de deux plans* AD, AF (*fig.* 128), *qui se rencontrent dans la droite* AB.

SOLUTION.

Il est évident que cette inclinaison doit se mesurer par la quantité dont le plan AF aura tourné pour s'écarter du plan AD avec lequel on peut concevoir qu'il étoit d'abord confondu. Or il est visible que dans ce mouvement tous les points du plan AF s'écartent des points correspondants du plan AD, avec lesquels ils étoient confondus en décrivant des portions de circonférence toutes du même nombre de degrés, et dont les centres sont dans chaque point de la commune section AB où aboutissent les perpendiculaires menées de ces points correspondants sur la même section commune AB, des plans AF, AD. De plus, il est visible que le rapport de chacun de ces arcs au rayon correspondant est toujours un rapport constant; donc puisque tous ces arcs sont également propres à mesurer le

le mouvement angulaire des deux plans sur la droite AB, chacun peut être également pris pour mesure de l'inclinaison des mêmes plans. Pour la trouver, il n'y a donc qu'à élever dans chaque plan, par un point quelconque G de la section commune AB des deux plans, deux droites GK, G*k* perpendiculaires à cette commune section, et égales entre elles; puis du point G comme centre décrire un arc de cercle K*k* qui sera la mesure de l'angle plan formé par l'inclinaison respective des plans AF, AD. C. Q. F. T. et D.

Corollaire I.

380. Donc *l'inclinaison de deux plans quelconques* AD, AF *est la même que celle de deux droites tracées dans ces mêmes plans, et perpendiculaires au même point de leur commune section.*

Corollaire II.

381. Il suit de là que tout ce que l'on a dit dans le premier livre sur deux lignes qui se coupent, doit aussi se dire de deux plans qui se rencontrent, puisque leur inclinaison est la même que celle des lignes perpendiculaires au même point de leur commune section. Donc, *si deux plans se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux.* Si deux plans paralleles sont coupés par un troisieme plan, *les angles alternes internes*, ou *alternes externes, seront égaux*; donc *les angles internes ou externes d'un même côté pris ensemble valent deux droits, etc.* et réciproquement si deux plans coupés par un troisieme font

des angles qui aient les conditions que l'on vient d'énoncer, ces plans seront paralleles.

COROLLAIRE III.

382. Il suit encore de-là que les angles AIB, AGB, AFB, ADB, etc. de la *figure* 127, sont respectivement égaux à ceux que font les plans ACI, ACG, ACF, ACD avec le plan MN sur lequel sont tirées les droites CI, CG, CF, CD. Car les lignes AI, BI; AG, BG; AF, BF sont respectivement perpendiculaires au même point des communes sections de ces plans, avec le plan MN, par le n°. 380 : d'où il est aisé de déduire la maniere de trouver tous ces angles géométriquement par la seule connoissance des lignes AC, AB, CB, et des angles BCI, BCG, BCF, etc. donnés de grandeur sur le plan MN. Je laisse aux commençants le plaisir de trouver cette solution.

COROLLAIRE IV.

383. Donc, si l'angle KGL (*fig.* 129) est droit, le plan AH sera perpendiculaire au plan AD; mais dans ce cas la ligne *Gk* est aussi perpendiculaire à la commune section AB des deux plans; donc la ligne *Gk* est perpendiculaire au plan AD. Donc lorsqu'un plan est perpendiculaire à un autre, il doit nécessairement passer par quelque ligne perpendiculaire à ce plan; et réciproquement s'il passe par une ligne perpendiculaire à ce plan, il lui sera lui-même perpendiculaire.

COROLLAIRE V.

384. Donc, si un plan AH est perpendiculaire à un plan AD, et si, par un point quelconque G de leur commune section, on élève une perpendiculaire au même plan AD, cette droite sera toute entière dans le plan AH; car si cette ligne ne se trouvoit pas dans le plan AH, on pourroit mener par le même point G et dans le même plan plus d'une perpendiculaire à une même droite IK, ce qui seroit absurde.

COROLLAIRE VI.

385. On voit encore (*figure* 126) que, par une ligne AB perpendiculaire au plan MN, on peut faire passer une infinité de plans perpendiculaires au plan MN; mais par une droite AF oblique au même plan, on ne peut mener à ce plan que le seul plan BG qui lui soit perpendiculaire; savoir, celui qui passe par la droite AF et par une ligne abaissée du point A, perpendiculairement au plan MN.

PROBLÈME VII.

386. *Trois plans* ABCD, ADEF, ABGI, *qui doivent s'assembler pour former un angle solide, étant donnés* (*figure* 15, *pl. VIII*, n°. 2), *trouver l'inclinaison de chacun des plans* ADEF, ABGI *sur le premier* ABCD.

SOLUTION.

Sur les lignes AF, AI, qui doivent se réunir pour former une arête commune, soient prises

les lignes égales AM, AN, et par leurs extrémités soient abaissées les perpendiculaires MK, NL aux droites AD, AB, qui prolongées se coupent en un point P. Sur ces mêmes lignes, comme diametres, soient décrites des demi-circonférences KOM, LQN, auxquelles soient inscrites les cordes KO, QL respectivement égales aux droites KP, LP; les angles que font ces cordes prolongées autant qu'il sera nécessaire avec les droites MK, NL, seront égaux aux angles demandés que font les plans ADEF, ABGI, avec le plan ABCD; de plus le point P sera celui où tomberoit une perpendiculaire abaissée du point où les droites AM, AN, considérées comme une arête commune, se réuniroient sur le plan ABCD.

DÉMONSTRATION.

Lorsque les plans ADEF, ABGI seront réunis pour former avec le plan ABCD un angle solide en A, les points M, N n'en feront plus qu'un; les lignes MK, NL, étant perpendiculaires aux droites AD, AB; ainsi que leurs prolongements KP, LP. Donc, si l'on imagine que les plans ADEF, ABGI tournent sur les lignes AD, AB jusqu'à ce qu'ils soient assemblés par une arête commune, les angles formés par les droites MK et KP, NL et LP, seront compris par deux lignes perpendiculaires aux arêtes AD, AB communes au plan ABCD et à ceux ADEF, ABGI; donc (n°. 379) ces angles seront égaux aux angles que font ces mêmes plans avec le même plan ABCD. Il ne s'agit donc plus que d'en déterminer la va-

leur. Or, les lignes MK, NL doivent être considérées comme les hypoténuses de deux triangles rectangles qui ont pour côtés de l'angle droit les lignes KP, LP, et pour côté commun la perpendiculaire abaissée du point M, réuni avec le point N, sur le plan ABCD; donc, pour avoir ces angles, il n'y a qu'à décrire sur les lignes MK, NL les demi-circonférences KOM, LQN, et y inscrire les cordes KO, QL respectivement égales aux lignes KP, LP, ainsi qu'il est prescrit au problême. C. Q. F. T. et D.

SCHOLIE.

387. Si l'on vouloit déterminer l'angle que font entre eux les plans ADEF, ABGI, lorsque, par leur réunion sur une arête commune, ils font un angle solide en A, avec le plan ABCD; il n'y auroit qu'à joindre le plan ABGI avec le plan ADGF, par la réunion des lignes AM, AN, et opérer comme on vient de faire. Ce problême est de la plus grande utilité dans la théorie des développements, et par conséquent dans celle de la coupe des pierres; ainsi les commençants ne peuvent trop s'appliquer à le concevoir et à le résoudre.

THÉORÊME II.

388. *Si deux plans* EF, DG (*fig.* 130), *sont perpendiculaires à un même plan* MN, *je dis que leur commune section* AB *sera aussi perpendiculaire à ce plan.*

DÉMONSTRATION.

Par le point B où la commune section des

plans DG, EF rencontre le plan MN, on peut élever une perpendiculaire à ce plan, qui sera toute entiere dans le plan DG (n°. 383), et par le même point B on peut aussi élever une perpendiculaire au plan MN qui sera toute entiere dans le plan EF ; d'ailleurs, par un point B, on ne peut élever à un plan qu'une seule perpendiculaire ; donc cette ligne sera à la fois dans le plan DG et dans le plan EF ; donc l'intersection commune des deux plans est perpendiculaire au plan MN. C. Q. F. D.

DÉFINITION.

389. Lorsque plusieurs angles plans ASB, BSD, DSE (*fig.* 131), etc. se réunissent en un seul point S, et renferment un espace indéfini SABDEF ; ce même espace se nomme *angle solide*.

THÉORÈME III.

390. *Si tant d'angles plans que l'on voudra forment entre eux un angle solide, la somme de tous ces angles sera toujours moindre que quatre angles droits, ou que* 360°.

DÉMONSTRATION.

Ayant mené au-dessous du sommet S de cet angle solide un plan quelconque ABDEF, qui coupe tous les angles plans qui forment l'angle solide, soit abaissée du sommet S la perpendiculaire SC sur le même plan, et soient tirées les lignes CA, CB, CD, CE, CF à tous les angles du polygone ABDEF ; il est visible que tous les angles autour du point C valent quatre droits ;

de plus, il n'est pas moins évident que tous les angles ASB, BSD, DSE et *c*, sont plus petits que leurs correspondants ACB, BCD, DCE, etc. puisque ces angles ayant des bases communes, les premiers ont leur sommet plus éloigné de leur base que les seconds; mais tous ces angles forment l'angle solide qui est en S; donc tous les angles plans qui forment cet angle solide, valent moins que quatre droits. C. Q. F. D.

CHAPITRE II.

Des solides.

391. On nomme *solide* en général, *toute étendue qui a les trois dimensions, longueur, largeur et épaisseur.* Les géometres ne considerent dans les solides que le volume qu'ils occupent dans l'espace, ou le rapport de ce volume à un autre volume pris pour unité ou pour mesure; et comme dans un même corps la quantité de matiere qu'on appelle aussi sa masse est proportionnelle au volume, les regles que donnent les géometres pour déterminer les volumes servent aussi à mesurer la masse ou le poids des corps. Avant de nous occuper de cette recherche, il faut commencer par donner une notion précise des différentes especes de corps ou solides qui se rencontrent le plus souvent, et auxquels tous les autres peuvent se rappeller facilement.

DÉFINITIONS.

392. Si une surface quelconque se meut parallèlement à elle-même le long d'une droite quelconque AM (*fig.* 132, 133, 134, 135, 136 et 137), perpendiculaire ou oblique au plan de cette surface; le solide engendré dans ce mouvement sera nommé *prisme.*

393. La ligne AM, le long de laquelle on conçoit la surface en mouvement, se nomme *directrice;* et la surface qui forme le prisme sera appellée *plan générateur* ou *base génératrice.*

394. Une perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la face supérieure du prisme sur sa base génératrice, sera nommée *hauteur* du prisme.

395. On distingue le prisme en plusieurs espèces, et par la position de la directrice à l'égard du plan générateur, et par la figure du plan générateur. Si la directrice est perpendiculaire au plan de la base génératrice, le prisme est un *prisme droit;* si la même directrice est inclinée ou oblique au plan de cette même base, le prisme sera nommé *prisme oblique;* donc, dans un prisme droit, sa hauteur est égale à la portion de la directrice contenue entre les bases inférieures et supérieures du même prisme.

En considérant le prisme par rapport à sa base, il y en a autant que de bases particulières. Celui dont la base est un triangle (*fig.* 132) se nomme *prisme triangulaire.* Celui dont la base est un quadrilatere, se nomme *prisme quadrangu-*

laire; si le quadrilatere est un parallélogramme, il s'appelle *parallélipipede.*

396. Si la base est un quarré, et si de plus le prisme étant droit, sa hauteur est égale au côté de ce quarré, le prisme se nomme *cube.* Ce solide étant un des plus simples à cause de l'égalité de toutes ses dimensions et de tous ses angles solides, est aussi celui auquel on tâche de rapporter la mesure de tous les solides. De-là mesurer un solide quelconque ou *cuber* ce solide, sont des termes synonymes en géométrie.

Si la base du prisme est un pentagone, un hexagone, et en général un polygone régulier ou irrégulier quelconque, le prisme prend sa dénomination du polygone qui lui sert de base, et se nomme *prisme pentagonal, prisme hexagonal, etc.*

397. Si la base du prisme est un cercle, alors le prisme se nomme *cylindre; cylindre droit,* si la directrice AM est perpendiculaire au plan de sa base génératrice (*fig.* 135); *cylindre oblique,* si la même directrice est inclinée au plan du même cercle générateur (*fig.* 137).

398. Le solide qui se rencontre le plus souvent après les prismes (*fig.* 138, 139, 140, 141, 142) est celui que l'on nomme *pyramide.* On appelle ainsi tout solide formé par le mouvement d'une droite indéfinie, dont une extrémité est fixe en un point S, autour duquel elle peut néanmoins tourner, tandis que, par son extrémité inférieure, elle décrit le contour d'un polygone régulier ou irrégulier quelconque.

399. On voit par cette formation de la pyra-

mide, que ce corps est terminé à sa base, d'abord par un plan quelconque, et latéralement par autant de triangles qu'il y a de côtés dans cette base, qui tous vont aboutir à un même point S, élevé au-dessus de cette base, et que l'on nomme *sommet* de la pyramide.

400. Une perpendiculaire SF abaissée du sommet de la pyramide au plan de sa base, se nomme *hauteur de la pyramide*. On distingue plusieurs especes de pyramides. Celle dont la base est un polygone régulier, et dont le sommet se trouve dans une perpendiculaire au plan de la base, et qui passe par le centre de cette base, se nomme *pyramide droite et réguliere*. Celle dont la base n'est pas un polygone régulier se nomme *pyramide irréguliere*. Dans les pyramides régulieres la ligne menée du sommet au centre de la base, se nomme *axe* de la *pyramide* : dans les pyramides dont la base est un polygone régulier, si l'axe n'est pas perpendiculaire au plan de la base, la pyramide se nomme *pyramide oblique*.

401. On distingue aussi les pyramides par le nombre des côtés de leurs bases. Celle dont la base est un triangle se nomme *pyramide triangulaire* ou *tétrahedre* (*fig.* 138). Ce solide est le plus simple de tous les solides, puisque, pour terminer un volume ou un espace par des plans, il en faut au moins quatre. Le tétrahedre est dans les solides ce que le triangle est dans les surfaces. De même qu'il n'y a point de surface plane que l'on ne puisse décomposer en triangles, il n'y a point non plus de solide quelqu'irrégulier

qu'il puisse être, que l'on ne puisse décomposer en tétrahedres ou en pyramides triangulaires. Si la base de la pyramide est un quadrilatere, un pentagone, un hexagone, etc. en un mot, un polygone quelconque, elle prend sa dénomination du polygone qui lui sert de base, et se nomme pyramide *quadrangulaire, pyramide pentagonale, hexagonale*, etc. Enfin, si la base de la pyramide est un cercle ou un polygone régulier d'une infinité de côtés, elle prend le nom de *cône* (*fig.* 141, 142). Le cône est oblique, si son axe, ou la ligne menée de son sommet au centre de sa base, est oblique à cette même base; il est *droit* si ce même axe est perpendiculaire au plan de cette base.

402. Si l'on coupe une pyramide quelconque par un plan *abcde* (*fig.* 139, 140), au-dessous du sommet, le solide renfermé entre ce plan et la base ABCDE de la pyramide entiere, sera nommé *tronc de pyramide*, ou *pyramide tronquée*. Si le plan de section est parallele à celui de la base, on le nomme *tronc de pyramide à bases paralleles*. Il en est de même d'une partie de cône comprise entre la base d'un cône, et une section de ce cône faite par un plan mené au-dessous du sommet à travers ce même cône; on l'appellera *cône tronqué* simplement, ou cône *tronqué à bases paralleles*, si la section est parallele à sa base.

403. Tels sont à-peu-près les solides dont nous allons rechercher les principales propriétés. Nous insisterons peu sur la mesure de leurs surfaces, puisque nous avons vu, dans le livre précédent,

la maniere de mesurer toutes les surfaces planes; il s'agira ici particulièrement de leurs solidités et des rapports de ces solidités avec leurs dimensions. Nous passerons ensuite aux solides terminés par des surfaces courbes, parmi lesquels nous n'examinerons que la sphere, et quelques solides dont on mesure les surfaces et la solidité, comme celles de la sphere.

De la surface des prismes et des cylindres droits ou obliques; de celle des pyramides régulieres ou irrégulieres, et de leurs parties.

THÉORÊME I.

404. *Si l'on coupe un prisme oblique quelconque par un plan* RSTVX (*fig.* 136 *et* 137,) *perpendiculaire à la directrice* AM, *et qu'on fasse un rectangle* rr'm'm, *dont la base* rr' *soit égale au contour développé de la section* RSTVX, *et dont la hauteur soit égale à la directrice* AM *du prisme; je dis que la surface de ce rectangle sera égale à celle du prisme sans y comprendre ses bases inférieures et supérieures.*

DÉMONSTRATION.

Soit divisée la base *rr'* de ce rectangle en parties *rs*, *st*, *tu*, *ux*, *xr'*, respectivement égales aux côtés RS, ST, TV, VX, XR de la section RSTVX; et par les points *s*, *t*, *u*, *x*, soient menées des paralleles à la droite *rm*. Ce rectangle se trouvera partagé en autant de rectangles qu'il y a de faces parallélogrammiques dans le contour

superficiel du prisme ; et de plus on va voir que chacun de ces rectangles est égal à chacun des parallélogrammes auquel il répond, ce qui est facile à démontrer.

Car puisque le plan RSTVX est perpendiculaire à la directrice AM, il sera aussi perpendiculaire à toutes les arêtes du prisme paralleles à cette même directrice. Donc les lignes RS, ST, TV, etc. sont perpendiculaires aux côtés opposés des parallélogrammes MB, NC, OD, etc. donc elles mesurent la largeur de ces parallélogrammes dont toutes les bases sont égales à la directrice AM; donc à cause de l'égalité des lignes RS, ST, TV, etc. aux lignes *rs*, *st*, *tu*, etc. on aura AM × RS = *mr* × *rs* ; BN × ST = *ns* × *st* ou *mr* × *st*, et ainsi de suite ; donc la somme de tous les parallélogrammes qui font le contour du prisme, est égale à la somme des rectangles *ms*, *nt*, *ou*, etc. c'est-à-dire au rectangle $rr'm'm$, qui a pour base le contour de la section, et pour hauteur le côté AM du prisme. C. Q. F. D.

Corollaire I.

405. Donc la surface d'un prisme droit quelconque, sans y comprendre sa surface génératrice et son opposée, est égale à un rectangle qui a pour base le contour de cette même base, et pour hauteur la hauteur du prisme. Car dans un prisme droit la base de ce prisme est elle-même une section perpendiculaire à la directrice.

Corollaire II.

406. Donc la surface convexe d'un cylindre

oblique quelconque (*fig.* 137), est égale à celle d'un rectangle qui auroit pour base une droite égale *rr'*, égale au contour d'une section RSTV, perpendiculaire à la directrice AM, et pour hauteur la même directrice AM. Si le cylindre est droit, sa surface convexe est toujours égale au contour de sa base par la hauteur AM de ce même cylindre : car le cylindre n'est autre chose qu'un prisme dont la base est un polygone d'une infinité de côtés.

COROLLAIRE III.

407. Donc la surface d'un cylindre droit dont la hauteur est égale au diametre de sa base, est quadruple de l'aire de sa base. Car l'aire de cette base est égale au produit de son contour par la moitié du rayon ; et la surface convexe du cylindre droit, dont la hauteur est égale au diametre de sa base, sera égale au produit du contour de cette même base par le diametre qui est quadruple de la moitié du rayon.

SCHOLIE.

408. La mesure des surfaces cylindriques sert à faire connoître les surfaces *des voûtes en berceau*, qui ne sont autre chose que des moitiés de surfaces cylindriques dont l'axe est parallele au plan de l'horizon lorsque le *berceau est droit*, ou dont l'axe est incliné à l'horizon lorsque le berceau est *rampant*.

THÉORÊME II.

409. *Soient une pyramide* SABCDE *quelconque*

(*fig.* 139.), *et une droite aussi quelconque menée du sommet* S *de la pyramide à un point tel que l'on voudra de sa base; si l'on coupe cette pyramide par un plan* abcde, *parallele à cette même base, on aura toutes les propriétés suivantes.*

1°. *Toutes les arêtes* SA, SB, SC, *etc. seront coupées en parties proportionnelles par le plan* abcde, *ainsi que la droite* SF.

2°. *La section* abcde *sera semblable au plan* ABCDE.

3°. *Les points* F, f, *où la ligne* SF *rencontre la base et le plan coupant* abcde, *seront des points semblablement placés dans ces figures.*

4°. *Les contours des polygones* ABCDE, abcde, *ainsi que les intersections de ces surfaces par des plans menés par la droite* SF *et les arêtes de la pyramide, seront proportionnels aux lignes* SF, Sf, *comprises entre le sommet de la pyramide et les mêmes plans.*

5°. *Enfin, les aires* ABCDE, abcde *seront entre elles comme les quarrés des lignes* SF, Sf.

DÉMONSTRATION.

Soient menés par la droite SF, et par les arêtes de la pyramide, des plans SFA, SFB, SFC, etc. qui couperont la section *abcde* dans les lignes *fa, fb, fc, fd,* etc. Cela posé, puisque les communes sections de deux plans paralleles par un troisieme, sont des lignes paralleles (n°. 377), les triangles ASF, BSF, ASB, BSC, CSD, etc. seront semblables à leurs correspondants *aSf*, *bSf*, *aSb*, *bSc*, *cSd*, etc; donc les côtés de ces

triangles seront proportionnels, et donneront, en les comparant deux à deux, SF : S*f* :: SA : S*a* :: SB : S*b* :: SC : S*c* :: SD : S*d*, etc. C. Q. F. 1°. D.

2°. Puisque les triangles AFB, BFC, CFD, etc. dans lesquels le plan ABCDE de la base se trouve divisé par les plans menés par la droite SF et les arêtes de la pyramide, ont leurs côtés respectivement parallèles à ceux *afb*, *bfc*, *cdf*, dans lesquels la section *abcde* se trouve partagée par les mêmes plans, il est visible que tous ces triangles seront semblables les uns aux autres; donc les deux figures ABCDE, *abcde*, qui sont formées de ces triangles, seront des figures semblables. C. Q. F. 2°. D.

3°. Puisque les triangles AFB, *afb* sont semblables, les distances FA, FB du point F aux extrémités A et B du côté AB de la base, seront proportionnelles aux distances *fa*, *fb* du point *f* aux extrémités *a*, *b* du côté *ab* de la section *abcde*, et ces distances seront aussi entre elles comme ces mêmes côtés; donc, par le n°. 221, ces points F, *f* sont semblablement placés dans ces polygones.

4°. Puisque les polygones ABCDE, *abcde* sont semblables, les côtés du premier seront aux côtés correspondants du second, comme un côté quelconque du premier est à son correspondant du second, ou comme une droite quelconque FB est à son homologue *fb*, dans la section *abcde*; et par conséquent aussi les contours de ces polygones seront encore entre eux comme les mêmes lignes homologues, c'est-à-dire :: FB : *fb*; mais FB : *fb* :: SF : S*f* à cause des triangles semblables

semblables SFB, S*fb*; donc ABCDE : *abcde* :: SF : S*f*. C. Q. F. 4°. D.

5°. Enfin, les figures ABCDE, *abcde* étant semblables, seront entre elles comme les quarrés de leurs lignes homologues (n°. 302). On aura donc cette proportion, ABCDE : *abcde* :: $\overline{AB}^2$: $\overline{ab}^2$ :: $\overline{SF}^2$: $\overline{Sf}^2$, puisque AB : *ab* :: SF : S*f*. C. Q. F. 5°. D.

Corollaire I.

410. Puisque la section d'une pyramide coupée parallèlement à sa base, est semblable à cette même base; il est clair qu'un solide à bases paralleles et non semblables, ne pourra être un tronc de pyramide; donc, pour reconnoître si un corps de cette forme est une portion de pyramide coupée parallèlement, il faudra voir si les surfaces paralleles sont ou ne sont pas semblables entre elles.

Corollaire II.

411. Puisque l'on a toujours, par l'article cinquieme du présent théorême, ABCDE : *abcde* :: $\overline{SF}^2$: $\overline{Sf}^2$; il s'ensuit que si l'on imagine que les distances au sommet S des plans paralleles à la base, croissent comme la suite infinie des nombres naturels; en donnant une même épaisseur infiniment mince aux plans *abcde*; ces surfaces que l'on pourra regarder comme les éléments de la pyramide, croîtront comme les quarrés des nombres naturels. Ainsi la mesure de la solidité

des pyramides dépendra de la sommation des quarrés des nombres naturels.

COROLLAIRE III.

412. Puisque, par le n°. 4 du même présent théorême, on a toujours AB : *ab* :: SF : S*f*; il s'ensuit que l'on aura aussi les deux proportions suivantes. AB — *ab* : AB :: SF — S*f*: SF; et AB — *ab* : *ab* :: SF — S*f*: S*f*. On voit donc par ces deux proportions comment il faut s'y prendre pour trouver la hauteur d'une pyramide entiere, ou de la partie qui en a été retranchée, par la seule connoissance de la hauteur d'un tronc de pyramide à bases paralleles et semblables. La premiere proportion donne, comme on le voit, la hauteur entiere de la pyramide, et la seconde donne celle de la pyramide emportée; ce qui est évident, puisque les trois premiers termes de ces deux proportions sont essentiellement connus.

COROLLAIRE IV.

413. Comme on n'a point fixé le nombre des côtés du polygone qui sert de base à la pyramide, non plus que la figure de cette même base, il s'ensuit que le théorême et tous ses corollaires sont également vrais, lorsque la base est un polygone régulier d'une infinité de côtés: mais dans ce cas la pyramide devient un cône; donc il faut appliquer au cône tout ce qu'on vient de démontrer des pyramides; d'où il suit que si l'on coupe un cône quelconque droit ou oblique par un plan parallele à sa base, 1°. toutes les droites menées du sommet à la base, soit au-dedans,

soit au-dehors de la surface convexe du cône, soit sur cette même surface, seront coupées en parties proportionnelles. 2°. Toute section du cône par un plan parallele à la base, sera un cercle. 3°. Les points où la base et le cercle formé par le plan coupant, seront rencontrés par une droite SF menée du sommet à la base, seront des points semblablement placés dans ces deux cercles. 4°. Les contours ou les rayons de ces cercles seront entre eux comme les droites SF, *Sf*; et les aires de ces cercles seront entre elles comme les quarrés des mêmes lignes. 5°. Enfin, si l'on a un tronc de cône à bases paralleles, dont on veuille retrouver la hauteur entiere ou celle du cône emporté, on la trouvera par les rayons de sa base inférieure et supérieure, par cette analogie : *La différence des rayons est au plus grand ou au plus petit rayon, comme la hauteur du cône tronqué est à celle du cône entier, ou du cône retranché.*

THÉORÈME III.

414. *Soit une pyramide quelconque* SABC (*fig.* 138), *et un triangle* MNO, *dont la base* NO *soit égale au contour de la base de la pyramide, et dont la hauteur* MN *soit égale à une droite* SD *menée du sommet* S *de la pyramide à un point quelconque* D *d'un des côtés* AB *de la base. Si l'on coupe la pyramide par un plan* abc *parallele à sa base, qui rencontre en* d *la droite* SD, *et qu'ayant pris sur la hauteur* MN *du triangle, une droite* Mn = Sd, *on tire* no *parallele à la base* NO *de ce même triangle; je*

dis que l'on aura, 1°. la droite no *égale au contour de la section* abc.

2°. *Si la pyramide est réguliere, et si la droite* SD *est menée du sommet au milieu de la base, les superficies des pyramides* SABC, Sabc, *sans y comprendre leurs bases, seront respectivement égales aux triangles* MNO, Mno.

3°. *L'aire du tronc de pyramide* ABCabc *sera égale à celle du trapeze* nNOo.

DÉMONSTRATION.

Puisque le plan *abc* est parallele au plan ABC qui est la base de la pyramide, toutes les lignes menées du sommet à la base, sont coupées en parties proportionnelles (n° 409), et sont entre elles comme les contours des sections ABC, *abc;* par le même n°, donc ABC : *abc* :: SD : S*d;* mais par hypothese SD : S*d* :: MN : M*n;* puisque ces lignes sont respectivement égales par la supposition; et à cause des paralleles NO, *no*, les triangles MNO, M*no* sont semblables, et donnent MN : M*n* :: NO : *no*; donc, puisque la suite des rapports égaux n'a pas été interrompue, on aura ABC : *abc* :: NO : *no*; mais la ligne NO a été supposée égale au contour ABC de la base de la pyramide; donc *no* sera égale aussi au contour de la section *abc.* C. Q. F. 1° D.

2°. Si la pyramide est réguliere, tous les triangles ASB, BSC, CSA, qui forment sa surface sans y comprendre la base, seront isosceles, et tous égaux entre eux, puisque la base doit être un polygone régulier, et que le sommet de la pyramide doit se trouver dans une perpendicu-

laire au plan de la base, et qui passe par le centre de cette même base; d'où il suit que toutes les arêtes SA, SB, SC, etc. doivent être égales entre elles; donc, si la ligne SD est menée du sommet au milieu de la base AB d'un des triangles ASB, cette ligne mesurera la hauteur des triangles qui forment la surface de la pyramide; et par conséquent cette surface sera égale à celle d'un triangle dont la base seroit égale à la somme de toutes les bases, et dont la hauteur seroit égale à la hauteur commune SD; c'est-à-dire au triangle MNO, dont on suppose la base NO, égale au contour de la base de la pyramide, et dont la hauteur MN est égale à la hauteur SD. On fera voir de même que la surface de la pyramide *Sabc* est égale au triangle M*no*; car à cause des plans paralleles ABC, *abc*, la pyramide SABC étant supposée réguliere, la pyramide *Sabc* le sera aussi; la ligne M*n* sera égale à la hauteur commune *Sd* des triangles égaux *aSb*, *bSc*, *cSa*, qui forment la surface de la pyramide *Sabc*; la ligne *no* sera égale au contour du triangle *abc*; donc le triangle M*no* est égal à la surface de la pyramide *Sabc*, sans y comprendre sa base. C. Q. F. 2°. D.

3°. La surface du tronc de pyramide étant égale à la différence des surfaces SABC, *Sabc* des deux pyramides, le sera aussi à celle des triangles MNO, M*no*, et par conséquent au trapeze N*no*O, C. Q. F. 3°. D.

COROLLAIRE I.

415. Si l'on fait passer un plan FGH à égales

distances des plans ABC, *abc*, et si l'on tire dans le triangle MNO une droite IL parallele à NO, et aussi à égales distances des droites NO, *no*; on démontrera, comme au théorême dernier, que le contour du triangle FGH est égal à la droite IL; mais la surface du trapeze N*no*O est égale au produit de cette droite IL par sa hauteur N*n*; donc aussi la surface du tronc de pyramide renfermé entre les plans paralleles ABC, *abc* est égale au produit du contour de la section FGH, par la hauteur D*d* qui mesure la distance des droites paralleles AB, *ab*.

Donc *la surface d'un tronc de pyramide réguliere à bases paralleles, est égale au produit du contour d'une section parallele à sa base, faite à égales distances des surfaces opposées, par la ligne perpendiculaire comprise sur l'une des faces du tronc de pyramide entre deux côtés correspondants des mêmes sections ou bases opposées.*

COROLLAIRE II.

416. Si l'on mene par le point L, milieu de O*o*, une droite PL*p* parallele à N*n*, et terminée à la ligne *no* prolongée autant qu'il sera nécessaire; il est visible que le rectangle NP*pn* sera égal en surface au trapeze NO*on*, et par conséquent à la surface du tronc de pyramide, à cause de l'égalité des triangles L*po*, LPO, qui ont deux angles égaux sur les bases égales L*o*, LO. De plus, il est visible que la ligne LI est moyenne arithmétique entre les droites NO, *no*; donc elle sera égale à $\frac{NO+no}{2}$; ainsi *la surface d'un*

tronc de pyramide réguliere à bases paralleles, est égale au produit de la distance Dd *de deux côtés paralleles quelconques par la demi-somme des contours des bases opposées; ou par une moyenne arithmétique entre les contours des mêmes bases.*

COROLLAIRE III.

417. Tout ce qu'on vient de dire de la pyramide triangulaire SABC (*fig.* 142), s'applique évidemment à toute autre pyramide réguliere, dont la base seroit un polygone régulier de tel nombre de côtés que l'on voudra; donc, si la base est un cercle, la pyramide devenant alors un cône, il faut appliquer au cône droit tout ce que l'on vient de démontrer sur la surface des pyramides régulieres et de leurs troncs à bases paralleles; c'est-à-dire, 1°. *que la surface convexe d'un cône droit est égale à celle d'un triangle dont la base* NO *seroit égale à la circonférence développée du cercle qui lui sert de base, et dont la hauteur seroit égale au côté* SA *du même cône; 2°. que la surface convexe d'un tronc de cône droit à bases paralleles, est égale à celle d'un trapeze dont les côtés opposés seroient les circonférences développées des mêmes bases paralleles, et dont la hauteur seroit égale à la portion* Aa *du côté* SA *du même cône compris entre les mêmes plans paralleles:*

Ou, ce qui revient au même, *que cette surface est égale au produit de la droite* Aa *par le contour d'une section faite à égales distances des bases opposées et paralleles, et par conséquent*

moyenne arithmétique entre les contours des mêmes bases.

COROLLAIRE IV.

418. Pour avoir la surface totale d'une pyramide réguliere, il est visible qu'il n'y aura qu'à ajouter celle de la base à celle qu'on vient de trouver. De plus, comme cette derniere est égale au produit du contour de la base par la moitié de la perpendiculaire abaissée du centre de la base sur un des côtés, il s'ensuit que *la surface totale de la pyramide sera égale au produit du contour de sa base par la demi-somme des lignes* SD, GD (*fig.* 138 et 142), *menées du sommet de la pyramide et du centre de sa base au milieu d'un des côtés quelconques de cette même base.* De même *la surface totale d'un cône droit sera égale au produit de la circonférence de sa base par la demi-somme de son côté* SA, *et du rayon* CA *de cette même base.*

SCHOLIE.

419. Si la pyramide n'est pas réguliere, tous les triangles qui forment sa surface sans y comprendre celle de sa base, seront inégaux; ainsi il faudra les mesurer séparément. Il en seroit de même de celle d'un tronc à bases paralleles d'une pyramide irréguliere; tous les trapezes qui formeroient sa surface sans y comprendre les bases opposées, seront pareillement inégaux; ainsi il faudroit les mesurer séparément. Il est bon d'avertir aussi que les surfaces convexes d'un cône oblique, et d'un tronc de cône

oblique, même à bases paralleles, ne peuvent se mesurer par les regles que l'on vient d'établir, parceque la surface convexe d'un pareil cône est composée d'une infinité de triangles dont les bases sont des parties infiniment petites de la circonférence du cercle, qui sert de base, et dont les hauteurs varient continuellement, et sont égales aux différentes perpendiculaires menées du sommet du cône au prolongement des mêmes côtés infiniment petits.

Les surfaces des cônes droits ou obliques se rencontrent presque toujours dans le toisé des surfaces de *voûtes en trompes.*

THÉORÊME IV.

420. *Si deux pyramides de même hauteur* SABCDE, SABCD *sont coupées à distances égales de leurs sommets par des plans paralleles à leurs bases; les sections* abcde, abcd *seront proportionnelles à ces mêmes bases* (*fig.* 139 et 140).

DÉMONSTRATION.

Par le théorême second (n°. 409), à cause des plans paralleles, les sections *abcde, abcd* seront semblables à leurs bases ABCDE, ABCD, et ces mêmes sections seront entre elles comme les quarrés des lignes SF, S*f*, ou SG, S*g* qui leur répondent; on aura donc ABCDE : *abcde* :: $\overline{SF}^2$: $\overline{Sf}^2$; mais à cause de l'égalité des lignes SF, SG, S*f*, S*g*, on aura $\overline{SF}^2$: $\overline{Sf}^2$ :: $\overline{SG}^2$: $\overline{Sg}^2$, et à cause

des plans paralleles ABCD, *abcd*, $\overrightarrow{SG} : \overrightarrow{Sg}$ :: ABCD : *abcd*; donc puisque la suite des rapports égaux n'a pas été interrompue, on aura ABCDE : *abcde* :: ABCD : *abcd;* c'est-à-dire que les sections faites à distances égales des sommets de deux pyramides *quelconques de même hauteur, et par des plans paralleles à leurs bases, sont proportionnelles à ces mêmes bases.* C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

421. Si les bases des deux pyramides de même hauteur sont égales entre elles, quoique de figures différentes; les sections qui leur sont paralleles, et faites à égales distances de ces mêmes bases, deviendront aussi égales entre elles: car, dans cette supposition, les antécédents de la proportion qu'on vient de démontrer deviennent égaux, donc les conséquents le seront aussi. Il faut dire la même chose d'une pyramide et d'un cône de même base et de même hauteur.

Donc, si l'on considere ces solides comme composés de lames infiniment minces, et paralleles à leurs bases, on peut établir que deux pyramides ou deux troncs de pyramides sont égaux en solidité; lorsqu'ils auront des bases et des hauteurs égales, quelles que soient d'ailleurs les figures des mêmes bases: il faut dire la même chose d'une pyramide et d'un cône, ou d'un tronc de pyramide et d'un tronc de cône à bases paralleles, dont les bases et les hauteurs sont égales. Car puisque ces solides sont supposés

avoir même hauteur, ils auront le même nombre d'éléments. D'ailleurs, par le théorême présent, chaque élément d'une part est égal à son correspondant. Donc ces solides sont nécessairement égaux dans cette supposition des bases et des hauteurs égales, quelle que soit d'ailleurs la figure des mêmes bases.

THÉORÊME V.

422. *Si deux troncs de pyramides à bases paralleles de même hauteur, ont aussi leurs bases proportionnelles entre elles, je dis que les pyramides dont ces corps font partie, étoient de même hauteur, quelle que soit la figure de ces mêmes bases (fig. 139 et 140).*

DÉMONSTRATION.

Supposant les pyramides entieres, et que l'on ait abaissé des sommets sur leurs bases des perpendiculaires SF, SG qui en mesurent les hauteurs, nous avons vu (n°. 409), que l'on a $\overline{SF}^2 : \overline{Sf}^2 ::$ ABCDE ; *abcde*; mais par hypothese . . . . . ABCDE : *abcde* :: ABCD ; *abcd*, et par le même n°. on a aussi ABCD ; *abcd* :: $\overline{SG}^2 : \overline{Sg}^2$; donc puisque la suite des rapports égaux n'a pas été interrompue, on aura $\overline{SF}^2 : \overline{Sf}^2 :: \overline{SG}^2 : \overline{Sg}^2$, et, tirant les racines, SF : S*f* :: SG : S*g*; donc, *detrahendo*, SF—S*f*, ou F*f* : SF :: SG —S*g* ou G*g* : SG; donc, puisque l'on a F*f* = G*g*, par la supposition, on aura aussi SF = SG;

c'est-à-dire que les hauteurs des deux pyramides dont ces troncs font partie, sont égales entre elles. Il faut dire la même chose d'un tronc de cône, et d'un tronc de pyramide de même hauteur, dont les surfaces opposées sont paralleles et proportionnelles entre elles. C. Q. F. D.

CHAPITRE III.

De la mesure des solides.

DÉFINITION.

423. *MESURER un solide quelconque, c'est trouver combien de fois un autre solide dont les dimensions sont connues, est contenu dans le solide à mesurer.* Nous commencerons par rechercher la solidité des prismes et des pyramides, parceque ces corps sont les plus simples, et que l'on a tâché d'y ramener tous les autres solides.

PROBLÊME I.

424. *Trouver la solidité d'un prisme quelconque* ABCDMNOP (*fig.* 133).

SOLUTION.

Soit *mabcd*, le solide pris pour unité; il est évident que plus sa base sera contenue dans la base du prisme à mesurer, plus ce dernier contiendra de fois le solide pris pour mesure,

quelle que soit la hauteur de ce prisme. Pareillement plus la hauteur du solide pris pour unité, sera contenue de fois dans celle du prisme à mesurer, plus encore ce même prisme contiendra de fois la même unité. Donc la solidité du prisme est en raison composée des nombres de fois que sa base contient celle de l'unité solide, et que sa hauteur contient celle de la même unité; ce qui donne la regle suivante pour mesurer un prisme quelconque. *Cherchez combien de fois la base du solide pris pour unité est contenue dans celle du solide à mesurer; cherchez pareillement combien de fois la hauteur de la même unité est contenue dans celle du même solide prismatique; le produit de ces deux nombres vous indiquera combien de fois il faut répéter le solide pris pour mesure, afin d'avoir la solidité du corps à mesurer.* C. Q. F. T. et D.

Corollaire I.

425. Donc *les solidités de deux prismes quelconques par rapport à la même unité, sont entre elles, comme les produits des rapports de leurs bases et de leurs hauteurs, à la base et à la hauteur du solide pris pour mesure ou pour unité.* D'où il suit que deux prismes sont égaux lorsque ces produits sont égaux; 2°. que deux prismes qui ont des bases égales sont entre eux comme leurs hauteurs; 3°. que deux prismes qui ont des hauteurs égales, sont entre eux comme leurs bases; et réciproquement pour les trois cas.

COROLLAIRE II.

426. Donc deux prismes sont égaux en solidité lorsqu'ils ont des bases réciproquement proportionnelles à leur hauteur. Car dans ce cas les produits qui expriment les rapports de leurs solidités à la même unité, sont nécessairement égaux.

SCHOLIE.

427. Communément on exprime la proposition que nous venons de démontrer par cet énoncé général, *qu'un prisme quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.* Nous observerons à cet égard ce que nous avons déja remarqué sur la mesure des surfaces; savoir que cet énoncé pris à la lettre seroit évidemment contraire aux principes de la multiplication; puisque le multiplicande seroit une surface, le multiplicateur, une ligne, et non pas un nombre abstrait; et que le produit, quand même on accorderoit qu'il seroit composé d'unités solides, ne pourroit avoir des unités de même nature que le multiplicande; ce qui est, comme on le voit, une suite d'absurdités et de contradictions. La maniere dont nous nous y sommes pris, est la seule rigoureuse, et à l'abri de toute chicane, puisque le vrai multiplicande est le solide pris pour unité; que le multiplicateur étant le produit des nombres de fois que les dimensions du solide à mesurer contiennent les dimensions correspondantes de l'unité, est un nombre abstrait ou un nombre de fois; et qu'ainsi le produit a

nécessairement des unités de même nature que le multiplicande. Nous adopterons cependant la maniere ordinaire de s'exprimer, et nous dirons qu'un *prisme ou un cylindre quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur;* parceque cette façon de s'énoncer est plus commode, et que d'ailleurs on sait comment elle doit être modifiée pour être exacte.

THÉORÊME I.

428. *Un tronc de pyramide à bases triangulaires paralleles (fig. 143), est composé de trois pyramides de même hauteur que le tronc, dont la premiere a pour base la base inférieure du tronc, la seconde a pour base la base supérieure, et la troisieme, une base moyenne géométrique entre les deux bases opposées.*

DÉMONSTRATION.

Dans les trapezes ou faces latérales, ayant tiré les diagonales BE, CE, si l'on fait passer un plan par ces deux lignes, il est visible qu'il retranchera une pyramide ABEC, qui a même hauteur que le tronc, et dont la base est le triangle BAC, qui est la base inférieure du tronc de pyramide; donc ce tronc contient déja une pyramide de même hauteur que lui, et qui a pour base le triangle, qui est celle du même tronc. 2°. Si par les arêtes BE et EF on fait passer un nouveau plan; ce plan retranchera une autre pyramide BDEF, qui a encore même hauteur que le tronc, et dont la base, en regardant le point B comme sommet, est le triangle DEF.

Reste une troisieme pyramide de forme très irréguliere EBCF, que l'on peut également considérer comme ayant son sommet au point B, ou comme ayant son sommet au point E. Dans le premier cas, elle aura pour base le triangle ECF; et dans le second elle aura pour base le triangle BCF. Considérant d'abord cette pyramide comme ayant son sommet au point B, je la compare à la pyramide ABEC, et je vois que ces deux pyramides, ayant le sommet au même point B, seront entre elles comme leurs bases ACE, ECF; et parceque ces triangles sont compris entre paralleles, ils ont même hauteur, et sont entre eux comme AC : EF. Donc si l'on veut que la pyramide BECF ait même hauteur que la pyramide EBCA dont la hauteur est celle du tronc, on aura, en nommant X, la base inconnue de cette pyramide; et parceque les bases de ces pyramides doivent toujours garder le même rapport lorsqu'elles ont même hauteur, on aura, dis-je, BAC, X:: AC : EF, ou, à cause des triangles semblables, BAC: DEF:: BC: DF. Présentement si l'on compare la même pyramide EBCF avec la pyramide EBDF, en les considérant comme ayant le sommet au même point E; elles auront même hauteur, et seront entre elles comme leurs bases, qui sont les triangles BFC et BDF; et parceque ces triangles sont compris entre paralleles BC, DF, ils sont entre eux comme BC : DF. Donc si l'on veut encore que la même pyramide EBCF ait même hauteur que la pyramide BDEF, considérée comme ayant son sommet au point B, et pour base le triangle DEF.

DEF dont la hauteur est alors égale à celle du tronc; la base de la pyramide EBCF sera toujours dans le même rapport avec celle de la pyramide BDEF, on aura donc BC : DF :: X : EDF. Donc puisque la suite de rapports égaux n'a pas été interrompue, on aura BAC : X :: X : EDF, c'est-à-dire que la troisieme pyramide, ayant de même que les deux autres sa hauteur égale à celle du tronc, doit avoir sa base moyenne géométrique; entre les surfaces opposées inférieure et supérieure. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

429. *Donc une pyramide triangulaire quelconque est le tiers d'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur.* Car si les triangles BAC, DEF, toujours semblables et paralleles, deviennent égaux; le tronc de pyramide devient un prisme triangulaire; et les trois pyramides dont on vient de parler deviennent égales entre elles, ayant toutes trois même base et même hauteur; donc chacune est le tiers du prisme dont elle fait partie.

COROLLAIRE II.

430. Donc une pyramide quelconque, quel que soit le polygone qui lui sert de base, sera le tiers d'un prisme polygonal de même base, et de même hauteur qu'elle; car cette pyramide et le prisme pourront être décomposés dans le même nombre de pyramides et de prismes triangulaires de même base et de même hauteur, dont chacune sera toujours le tiers de l'autre;

donc la pyramide entiere droite ou oblique, réguliere ou irréguliere, sera toujours le tiers du prisme correspondant de même base et de même hauteur qu'elle.

COROLLAIRE III.

431. *Donc un cône droit ou oblique est pareillement le tiers d'un cylindre droit ou oblique de même base et de même hauteur que lui.* Ainsi l'on en trouvera la solidité en multipliant sa base par le tiers de sa hauteur.

SCHOLIE.

432. Nous avons vu (n° 411) que l'on pouvoit considérer les pyramides et les cônes comme étant composés d'éléments semblables, et qui croissent comme les quarrés de leurs distances au sommet; c'est-à-dire comme les quarrés des nombres naturels, et parceque ces éléments n'ont qu'une épaisseur infiniment petite, dans une hauteur finie, il faudra concevoir une infinité d'éléments; d'où il suit que la solidité de la pyramide donne la sommation des quarrés de tous les nombres naturels depuis zéro jusqu'à l'infini; en sorte que *plus on prendra de termes de la suite des quarrés des nombres naturels, et plus on approchera d'avoir pour somme le tiers du cube du dernier terme.*

THÉORÊME II.

433. *Une portion de prisme triangulaire droit quelconque, dont la face supérieure n'est pas*

parallele à la base, est composée de trois pyramides triangulaires de même base que le prisme, et dont les hauteurs sont respectivement égales à chacune des hauteurs des trois points D, E, F *qui terminent la base supérieure* (*fig.* 144).

DÉMONSTRATION.

Ayant tiré dans les faces latérales ABED, BCFE, ACFD les diagonales AE, CE et AF; si l'on fait passer un plan par les lignes AE et CE, et un autre plan par les lignes AE et AF, le tronc de prisme sera partagé en trois pyramides triangulaires AECB, AECF et AEDF. La premiere, ayant pour base le triangle ABC, aura son sommet au point E, et par conséquent pour hauteur celle EB du point E sur le plan ABC. Si l'on compare la seconde pyramide EACF avec la premiere EABC; ces deux pyramides ayant le sommet au même point A, seront entre elles comme les triangles BEC, EFC, qui leur servent de base; ou parceque ces triangles sont compris entre paralleles, comme leurs bases EB, CF. Donc, si l'on donne à ces mêmes pyramides la même base commune BAC, leurs hauteurs devront toujours être entre elles comme BE, CF; mais BE est la hauteur de la premiere pyramide dans cette supposition qu'elle a pour base le triangle BAC; donc CF sera aussi la hauteur de la seconde pyramide. On démontreroit de même que la pyramide AFED est à la pyramide ACEB de même hauteur qu'elle :: DAE : BAE, ou à cause que ces triangles sont compris entre paralleles :: AD : BE; donc si l'on donne encore à la

pyramide AEFD le triangle BAC pour base, de même qu'à la pyramide AECB, ces deux pyramides devront toujours avoir des hauteurs dans le rapport de AD à BE; donc, puisque BE est la hauteur de la premiere, AD sera aussi la hauteur de la derniere; donc une portion de prisme droit triangulaire, dont la surface supérieure n'est point parallele à sa base, est composée de trois pyramides triangulaires de même base que lui, et dont les hauteurs sont égales à celles des trois points D, E, F sur la base. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

434. Donc la solidité d'un pareil corps est égale à $BAC \times \frac{AD+BE+CF}{3}$; c'est-à-dire *au triangle qui lui sert de base, par le tiers de la somme des trois hauteurs.* On déduiroit encore de-là, comme du théorême précédent, que toute pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur.

COROLLAIRE II.

435. On déduit encore de ce théorême la maniere de mesurer une portion de prisme quadrangulaire quelconque, dont les quatre hauteurs AD, BE, CF, GH (*fig.* 145) sont inégales entre elles; soit que les deux triangles DEF, DHF, qui terminent la partie supérieure, se trouvent ou ne se trouvent pas dans un même plan; car, en tirant la diagonale AC dans le plan de la base, et menant par cette ligne et par les arêtes du solide le plan ACFD, on aura deux troncs de

prisme, dont chacun se mesurera comme celui de la *figure* 144. Ainsi ce solide sera égal à $ABC \times \frac{AD+BE+CF}{5} + AGC \times \frac{AD+GH+CF}{3}$; et si la base est un parallélogramme, ce solide deviendra encore plus facile à toiser, à cause de l'égalité des triangles ABC, AGC, ce qui donnera pour la solidité de ce corps

$ABC \times \frac{2AD+2CF+BE+GH}{3}$, ou bien encore

$ABGC \times \frac{2AD+2CF+BE+GH}{6}$.

On pourroit pousser plus loin les applications de ces principes à la cubature des corps irréguliers; mais nous y reviendrons bientôt après avoir examiné la sphere et les différents solides qui s'y rapportent, ainsi que les principales propriétés des corps réguliers.

CHAPITRE IV.

Des propriétés de la sphere et des solides dont la mesure se détermine par les mêmes regles, soit pour leurs surfaces, soit pour leurs volumes.

DÉFINITIONS.

436. *La sphere est un solide terminé par une seule surface dont tous les points sont à égales distances d'un point placé au-dedans de ce corps, et qui en est appellé le centre*; d'où il suit que ce so-

lide peut être formé par la révolution de la demi-circonférence d'un cercle quelconque autour de son diametre.

COROLLAIRE.

437. Donc toute section de la sphere par un plan, sera un cercle; car tous les points communs à ce plan, et à la surface de la sphere, seront à égales distances du centre, par la définition de la sphere, et par conséquent également éloignés de la perpendiculaire abaissée du même centre sur ce plan : donc ils seront aussi également éloignés du point où cette perpendiculaire rencontre le plan, et par conséquent ce point sera le centre du cercle formé par la commune section de la sphere et du plan.

DÉFINITIONS.

438. Toute section de la sphere par un plan qui passe par son centre, est appellée *grand cercle*, et toute section formée par un plan qui ne passe pas par le centre, se nomme *petit cercle*. Un plan qui coupe une sphere quelconque, la divise toujours en deux parties inégales, tant qu'il ne passe pas par le centre. Celle qui est plus grande que la demi-sphere, se nomme *grand segment;* celle qui est plus petite se nomme *petit segment;* la surface d'un petit segment de sphere se nomme *calotte;* celle d'une portion de sphere, comprise entre deux plans paralleles, se nomme *zone*. Une portion de la sphere engendrée par le mouvement d'un secteur circulaire autour du rayon perpendi-

culaire à sa corde, se nomme *secteur de sphere*. Ainsi le secteur sphérique est composé d'un segment et d'un cône.

THÉORÊME I.

439. *La surface de la sphere est égale à la surface convexe (fig. 146) d'un cylindre circonscrit à la même sphere, et de même hauteur qu'elle.*

DÉMONSTRATION.

Soit un demi-cercle AFB inscrit dans un parallélogramme ABDE; soit de plus divisée la circonférence AFB en une infinité de petits arcs, tels que MN par des droites MP, NL perpendiculaires au diametre AB, dont les prolongements diviseront la tangente DE en un même nombre de petites parties GH correspondantes. Si l'on imagine que la figure ABDE tourne avec toutes ces parties autour de l'axe AB, il est visible que le parallélogramme ABDE décrira la solidité d'un cylindre, le demi-cercle AFB décrira celle d'une sphere inscrite au même cylindre; la tangente EF et ses parties FG, GH décriront la surface convexe du cylindre, et des zones cylindriques de la même surface; enfin la demi-circonférence AFB et ses parties FM, MN, AN décriront la surface de la sphere, des petites zones de cette surface, ou des surfaces de calottes sphériques.

De plus, si l'on suppose encore l'arc MN assez petit pour qu'il puisse être confondu avec sa corde ou avec sa tangente, cette petite ligne

décrira la surface convexe d'un petit cône tronqué à bases paralleles, que l'on pourra considérer comme un élément de la surface de la sphere; et comme d'ailleurs il y aura même nombre d'éléments dans la surface de la sphere et dans la surface convexe du cylindre, il est visible que tout se réduit à démontrer que chaque élément d'une part est égal à chaque élément de l'autre. Pour y parvenir, soit encore tirée du point O, milieu du petit arc MN, la droite OQ perpendiculaire au rayon AC, soit mené le rayon CO, et la droite NR perpendiculaire à MP. Les triangles MRN, CQO sont semblables, ayant les côtés perpendiculaires les uns sur les autres, et donnent MN : NR :: CO ou GP : QO; et parceque les circonférences des cercles sont comme leurs rayons GP : QO :: *circ.* GP : *circ.* QO; donc on aura NR ou GH × *circ.* GP = MN × *circ.* QO; mais le premier produit n'est autre chose que la zone cylindrique élémentaire, décrite par GH, et le second (n°. 417) est pareillement la surface convexe du petit cône tronqué décrit par MN, ou l'élément de la surface de la sphere; donc, puisque ces deux surfaces ont le même nombre d'éléments, comme on vient de le voir, et que chacun est démontré égal à son correspondant, il est aussi démontré que la surface de la sphere est égale à la surface convexe du cylindre. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

440. Donc *la surface de la sphere est qua-*

druple de son grand cercle ; car on vient de voir qu'elle est égale à la surface convexe du cylindre ; or cette derniere est égale au produit de la circonférence par la ligne ED qui est égale au diametre, et la surface du cercle qui auroit pour rayon CA est égale au produit de la même circonférence par la moitié du même rayon, ou par le quart du diametre. On peut dire aussi que *la surface de la sphere est égale à celle d'un cercle qui auroit pour rayon le diametre de la sphere.* Car les cercles étant entre eux comme les quarrés de leurs rayons, le cercle fait sur le diametre comme rayon sera quadruple du cercle fait sur le rayon.

COROLLAIRE II.

441. Puisque tous les éléments de la surface de la sphere sont égaux aux éléments correspondants de la surface convexe du cylindre, il s'ensuit qu'une zone sphérique comprise entre deux plans paralleles, et décrite par un arc fini MN ou MF, sera égale à la zone cylindrique correspondante, décrite par la portion correspondante GH ou GF de la tangente au demi-cercle AFB. Il s'ensuit encore également que la surface de la calotte décrite par l'arc AN est égale pareillement à la surface cylindrique décrite par la portion EH de la tangente de même grandeur que la fleche AL de la calotte.

COROLLAIRE III.

442. Il suit encore de tout ce qui précede, que la surface de la calotte, décrite par l'arc AN,

est égale à celle d'un cercle qui auroit pour rayon la corde AN du même arc : car, par le théorême présent, la surface convexe de la calotte est égale à AL × *circ.* LH, et le cercle fait sur AN $= \frac{1}{2}$AN × *circ.* AN; il faut donc faire voir que ces produits sont égaux. Puisque la corde AN est moyenne proportionnelle entre le diametre AB et la partie AL qui lui répond (n°. 255), on aura AL.: AN :: AN : AB, et prenant la moitié des conséquents, puis substituant les circonférences aux rayons, dans le second rapport, la derniere proportion deviendra AL : $\frac{1}{2}$AN :: *circ.* AN : *circ.* AC. Donc AL × *circ.* AC $=$ $\frac{1}{2}$AN × *circ.* AN; c'est-à-dire l'aire ou surface de la calotte égale au cercle fait sur la corde AN comme rayon.

COROLLAIRE IV.

443. Donc la surface totale de la sphere est égale à celle de deux cercles quelconques faits sur deux cordes quelconques AN et BN, comme rayons, et menées d'un même point de la circonférence aux deux extrémités d'un même diametre; car le cercle fait sur le diametre AB est égal à la somme des cercles faits sur ces deux lignes prises pour rayons.

SCHOLIE.

444. Cette proposition est due au célebre géometre de Syracuse; il étoit lui-même si satisfait de l'avoir trouvé, que ce fut par elle seule qu'il crut devoir s'immortaliser, en la faisant graver sur son tombeau. Elle est susceptible d'un

plus grand degré de généralité, par lequel nous aurions pu commencer tout d'un coup : mais nous aurions craint d'altérer la beauté du théorême d'*Archimede ;* c'est pourquoi nous joindrons ici les applications que l'on peut faire de cette proposition au toisé de plusieurs especes de voûtes, qui se rencontrent souvent, après que nous aurons donné les définitions suivantes.

DÉFINITIONS.

445. Soit un prisme triangulaire ACFDBE (*fig.* 147), dont la base est un triangle CFD rectangle en F, et dont la hauteur AC est égale au côté CF de l'angle droit : ayant décrit du point C comme centre avec le rayon CF le quart de cercle ANMF, si de tous les points du quart de circonférence ANMF l'on mene des droites N*n*, M*m*, etc. toutes paralleles à la ligne DF, ou, ce qui revient au même, perpendiculaires au plan ACFE, et terminées au plan ACDB, la surface courbe ANMFDA, formée par toutes ces lignes, sera nommée *pan de voûte en plein cintre.* L'assemblage de plusieurs pans de voûtes en plein cintre sur une base réguliere, forme ce que l'on appelle *voûte en arc de cloître en plein cintre.* Si le plan de la base n'est pas un polygone régulier, les différents pans de voûtes qui la forment ne seront point en plein cintre, ou du moins il est impossible que tous le soient à la fois, les uns étant ce que l'on appelle *surmontés* ou *surbaissés.*

446. Soit un parallélogramme rectangle ABDE (*fig.* 148), qui sert de base au demi-cylindre

AFEDLB, que l'on appelle communément *voûte en berceau;* du centre C du demi-cercle AFE, ayant tiré dans le plan de la base les diagonales CB, CD; si par le rayon vertical CE et par ces diagonales on fait passer des plans CFB, CFD, qui retranchent de la surface du berceau les pans de voûte en plein cintre AFB, EFD, le reste BFLD de la surface sera nommé *lunette circulaire.* L'assemblage de plusieurs lunettes circulaires sur un plan régulier forme ce qu'on appelle *voûte d'arêtes en plein cintre.* Il y a aussi des voûtes d'arêtes *surbaissées* ou *surmontées*, formées par des voûtes en berceau aussi surmontées ou surbaissées qui se pénetrent. Comme le théorême d'*Archimede* ne s'applique pas aux voûtes surbaissées ou surmontées en général, nous allons en faire l'application aux premieres seulement; c'est-à-dire aux pans de voûtes en plein cintre, aux voûtes en arc de cloître, ou aux voûtes d'arêtes sur des plans réguliers et en plein cintre. Les autres dépendent de la quadrature des sections coniques, comme on le verra par la suite.

THÉORÊME II.

447. *La surface d'un pan de voûte triangulaire en plein cintre est égale à celle du parallélogramme* BDFE (*fig.* 147) *du prisme triangulaire auquel il est inscrit, et opposé à l'axe* AC *du même pan.*

DÉMONSTRATION.

Supposant la même construction que dans la

figure 146, si par les lignes MP, NL on fait passer des plans MP*m*, NL*n* paralleles au plan de la base, et terminés au plan vertical BDFE, il est visible que les aires correspondantes M*mn*N, G*gh*H du pan de voûte et du rectangle BDFE pourront être regardées comme les éléments correspondants de ces surfaces, en supposant toujours l'arc MN infiniment petit. Mais la surface M*mn*N est égale à MN × O*o* (n°. 417), et la surface G*gh*H est égale à GH × K*k*; ainsi tout se réduit à prouver que MN × O*o* = GH × K*k*. Ce qui ne souffre aucune difficulté; car à cause des triangles semblables CQO, MRN, on aura MN : RN :: CO ou QK : QO, et à cause des triangles paralleles QO*o*, QK*k* qui sont aussi semblables à raison des paralleles O*o*, K*k*, on aura QK : QO :: K*k* : O*o*; donc MN : RN :: K*k* : O*o*; donc MN × O*o* = RN × K*k* ou GH × K*k*; c'est-à-dire qu'un élément quelconque du pan de voûte est égal à l'élément correspondant du rectangle ABDFE. Donc la surface totale du même pan de voûte est égale au rectangle entier BDFE. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

448. Donc la surface d'un pan de voûte en plein cintre est double du triangle qui lui sert de base; car le triangle CFD = FD × $\frac{1}{2}$ CF, et celle du rectangle BDEF ou du pan de voûte qu'on vient de démontrer lui être égale, est égale à DF × FE; or FE est double de $\frac{1}{2}$ CF, puisqu'on suppose CF = FE, par la définition du pan de voûte en plein cintre.

COROLLAIRE II.

449. Donc la surface d'une portion de pan de voûte AN*n* formée par un plan LN*n* parallele à la base, est égale au parallélogramme EB*h*H déterminé par le prolongement du plan LN*n*, jusqu'à la rencontre du plan BDFE; et de même l'autre portion FN*n*D du même pan de voûte est égale au rectangle FD*h*H; car on démontreroit de la même maniere que ces surfaces correspondantes ont le même nombre d'éléments, et que chaque élément de l'une est égal à l'élément correspondant de l'autre.

COROLLAIRE III.

450. Puisque la surface du pan de voûte en plein cintre AFD est double du triangle CFD, il s'ensuit que celle d'une voûte pareillement en plein cintre, et dont la base est un polygone régulier quelconque, sera aussi double du polygone régulier qui lui sert de base; car, en menant dans le plan de la base du centre du polygone à tous les angles de cette figure des rayons obliques, et faisant passer par l'axe de la voûte, et chacun de ces rayons, des plans perpendiculaires au plan de la base, on divisera la voûte en autant de pans de voûtes égaux entre eux, qu'il y a de triangles égaux dans le plan de la base, et chaque pan de voûte, par le théorême présent, sera double du triangle correspondant; donc la voûte entiere que nous avons nommée *voûte en arc de cloître en plein cintre*, sera double du plan de sa base.

COROLLAIRE IV.

451. Donc la surface d'une lunette en plein cintre, ou celle qui reste d'un berceau droit ou demi cylindrique, après en avoir retranché les surfaces des pans de voûtes AFB, EFD, sera égale à la différence de la surface du demi-cylindre qui forme le berceau à celle du parallélogramme ABDE, qui lui sert de base : car la surface du pan de voûte AFB en plein cintre, étant double du triangle ACB qui lui sert de base par le (n°. 450), sera égale à celle du parallélogramme ABGC, et de même celle du pan de voûte EFD sera égale au parallélogramme CGDE; donc la surface des deux pans de voûtes à retrancher de celle du berceau pour avoir celle de la lunette est égale au parallélogramme ABDE; mais l'aire du berceau ou demi-cylindre est égale à AB × BLD, et celle du parallélogramme ABDE est égale à AB × BD; donc la surface de la lunette est égale à AB × BLD — AB × BD = AB × (BLD — BD. D'où il suit que si plusieurs lunettes en plein cintre forment par leurs rencontres mutuelles une voûte d'arête sur un plan régulier, *on aura la surface de la voûte en multipliant celle d'une lunette par le nombre des côtés du polygone.*

THÉORÈME III.

452. *La solidité de la sphere est les deux tiers de celle du cylindre droit qui lui est circonscrit.*

DÉMONSTRATION.

On peut concevoir la sphere comme composée d'une infinité de pyramides qui ont toutes leur sommet au centre de la sphere, et dont les bases sont des portions triangulaires infiniment petites de la surface de la même sphere; donc la solidité de la sphere sera égale à celle d'un cône droit qui auroit pour base la somme de toutes ces bases, ou la surface de la sphere, et pour hauteur le rayon. Désignant donc la surface d'un grand cercle de la sphere par S, et le rayon de la même sphere par R, cette surface sera 4 S (par le n°. 439); donc en multipliant cette surface par le tiers du rayon, on aura la solidité de la sphere égale à $\frac{4S \times R}{3}$. D'ailleurs la solidité du cylindre circonscrit étant égale au produit de sa base par sa hauteur entiere qui est le diametre, sera $S \times 2R$; donc en désignant les solidités de ces deux corps, par *spher.* et *cylin.*, on aura cette proportion, *spher.* : *cylin.* :: $\frac{4S \times R}{3} : 2R \times S$ :: 4 : 6 :: 2 : 3, en divisant l'antécédent et le conséquent du second rapport par tous les facteurs qui leur sont communs. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

453. Donc si l'on prend le rapport de 22 à 7 pour exprimer celui de la circonférence au diametre, ou de la demi-circonférence au rayon; la surface du grand cercle de la sphere dont le rayon est R, sera $\frac{22}{7}RR$ (n°. 178): multipliant le quadruple de cette surface par le tiers du rayon,

rayon, on aura pour la solidité de la sphere $\frac{88}{21}$RRR; c'est-à dire que *la solidité de la sphere est égale au cube du rayon multiplié par la fraction* $\frac{88}{21}$ ou $\frac{11}{21}$ D^3; d'où il suit que *les solidités des spheres qui ont différents rayons, sont entre elles comme les cubes de leurs rayons ou de leurs diametres.*

Corollaire II.

454. Donc la demi-sphere est pareillement les deux tiers du cylindre de même hauteur (*fig.* 146), qui lui est circonscrit; et par conséquent celle de l'espece de *mortier* engendré par la révolution de l'espace ANFE, autour de l'axe AC, sera égale au tiers du même cylindre. Donc la solidité de ce même corps est égale au cône qui auroit pour base le cercle fait sur AE, et pour hauteur le rayon AC.

Corollaire III.

455. On démontrera de même que la solidité du pan de voûte triangulaire en plein cintre ACFD, est égale aux deux tiers du prisme triangulaire qui lui est circonscrit (*fig.* 147); car on peut concevoir ce même pan de voûte, comme composé d'une infinité de pyramides triangulaires de même hauteur, dont tous les sommets vont aboutir au point C, et dont les bases sont répandues sur la surface du pan de voûte. Ainsi, puisque cette surface est double du triangle CFD qui lui sert de base (n°. 448), la solidité du pan de voûte sera $\frac{2\,CFD \times AC}{3}$; mais celle du prisme triangulaire circonscrit au même pan

de voûte, est CFD × AC ; donc la premiere est à la seconde comme $\frac{2}{3}$ à 1 ou :: 2 : 3.

COROLLAIRE IV.

456. Donc la solidité de l'espece d'*enclume* AFDBE qui reste en ôtant le pan de voûte du prisme triangulaire, est égale au tiers du même prisme, ou à une pyramide de même base et de même hauteur que le prisme.

COROLLAIRE V.

457. Donc la solidité d'une voûte en arc de cloître en plein cintre sur un plan régulier quelconque, est égale aux deux tiers du prisme de même base et de même hauteur; et si l'on retranche cette solidité du prisme, il restera celle du solide formé au-dessus de la voûte, depuis la naissance de la voûte jusqu'au niveau de la clef qui sera égal au tiers du même prisme.

COROLLAIRE VI.

458. Si de la solidité du demi-cylindre ABDEFL (*fig.* 148) l'on ôte celle des deux pans de voûte ACFB, ECFD, il restera la solidité de la lunette qu'il faudra encore retrancher du prisme triangulaire qui auroit le triangle CBD pour base, et le rayon CF pour hauteur; et l'on aura la solidité de ce qui remplit les reins de la lunette depuis la naissance de la voûte jusqu'au niveau de la clef. De-là il est facile de trouver une formule pour avoir ce dernier solide ; car la solidité du pan de voûte ACFB = AB × $\frac{1}{2}$ AC × $\frac{2}{3}$ CF ou

$\frac{AB \times \overline{CF}^2}{3}$, à cause que AC = CF ; donc les deux pans de voûtes à retrancher du demi-cylindre valent $\frac{2\,AB \times \overline{CF}^2}{3}$. Le demi-cylindre étant égal à AFE × AB vaudra $AB \times \frac{11}{7}\overline{CF}^2$; donc l'espece de coin demi-cylindrique BLDCF vaudra $\frac{11}{7}AB \times \overline{CF}^2 - \frac{2}{3}AB \times \overline{CF}^2 = \frac{19}{21}AB \times \overline{CF}^2$. Retranchant ce solide du prisme qui auroit CBD pour base, et CF pour hauteur, et qui est égal à $AB \times \overline{CF}^2$; il viendra, pour la solidité de ce qui reste du prisme même après en avoir ôté la lunette, $\frac{2}{21}AB \times \overline{CF}^2$: et si l'on a plusieurs solides de cette espece pour former une voûte d'arête en plein cintre sur un plan régulier, on en trouvera la solidité, en multipliant ce dernier produit par le nombre des côtés de la base.

THÉORÊME IV.

459. *La solidité d'un secteur de sphere engendré par la révolution du secteur circulaire* ACM (*fig.* 149), *autour de l'axe* AC, *est égale aux deux tiers d'un cylindre qui a même rayon que la sphere, et pour hauteur la fleche* AP *de la calotte de ce secteur.*

DÉMONSTRATION.

Supposant toujours la sphere inscrite au cylindre, soit prolongée la corde M*m* du segment

MA*m* jusqu'aux côtés du cylindre, et soient tirées les lignes DP, *d*P, au milieu de la corde M*m*. Cela posé, si l'on fait tourner le rectangle ADNP autour de l'axe AP, il est visible que le triangle DAP engendrera un cône qui sera le tiers du cylindre formé par la révolution du même rectangle ADNP; donc l'espece d'entonnoir décrit par la révolution du triangle DNP, sera les deux tiers du même cylindre : mais on peut concevoir cet entonnoir comme composé d'une infinité de pyramides qui ont pour hauteur NP, ou le rayon CA, et dont les bases sont répandues à la surface convexe du cylindre DN*nd*. Reste donc à prouver que la solidité du secteur sphérique est égale à celle de ce même entonnoir; ce qui ne souffre aucune difficulté. En effet la solidité de ce secteur est composée d'une infinité de pyramides qui ont leurs bases à la surface de la calotte MA*m*, et qui ont pour hauteur le rayon; mais la surface de la calotte est égale à celle du cylindre DN*nd* de même hauteur que la calotte (n°. 442). Donc *la solidité du secteur est égale à celle de l'entonnoir décrit par le triangle* DPN, *et par conséquent aux deux tiers du cylindre qui a pour base un grand cercle de la sphere, et pour hauteur la fleche* AP *du segment* MA*m*. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

460. Si la fleche AP devient égale au diametre AB, le secteur sphérique deviendra la sphere entiere elle-même; et l'on retrouvera, comme on l'a déja démontré, que sa solidité est égale

à celle des deux tiers du cylindre circonscrit. On trouveroit de même que la solidité du corps engendré par la révolution du secteur BMC*m* est égale aux deux tiers du cylindre qui auroit pour base un grand cercle de la sphere, et pour hauteur la fleche BP du grand segment MB*m*.

THÉORÈME V.

461. *La solidité d'un segment sphérique* MAm *est égale à celle d'un cylindre qui auroit pour base le cercle fait sur la fleche* AP, *et pour hauteur le rayon moins le tiers de la fleche.*

DÉMONSTRATION.

La solidité du segment MA*m* est évidemment égale à la différence de celle du secteur AMC*m* au cône MC*m*. Représentant donc, pour plus de facilité, chacun de ces solides par le profil ou la coupe superficielle par la révolution de laquelle il a été engendré, nous aurons MA*m* = AMC*m* — MC*m*; or, la solidité du secteur étant égale au produit de la surface de la calotte par le tiers du rayon CA, et cette surface étant aussi égale au cercle fait sur AM (n°. 442), ou bien à cause du triangle rectangle APM aux deux cercles faits sur les rayons AP et PM, on aura la solidité du secteur, ou AMC*m* = (*cer.* MP + *cer.* AP) × $\frac{1}{3}$ AC. La solidité du cône MC*m* est égale à *cer.* MP × $\frac{1}{3}$ CP; donc la solidité du segment MA*m* = (*cer.* MP + *cer.* AP) × $\frac{1}{3}$ AC — *cer.* MP × $\frac{1}{3}$ CP. = *cer.* MP × $\frac{1}{3}$ AC — *cer.* MP × $\frac{1}{3}$ CP + *cer.* AP × $\frac{1}{3}$ AC. = $\frac{\text{cer. MP} \times \text{AP}}{3}$ +

$\frac{cer.\ AP \times AC}{3}$. Pour avoir par-tout le même facteur, je fais attention que les cercles étant entre eux, comme les quarrés de leurs rayons, on aura *cer.* $\overline{AP}^2 : cer.\ \overline{MP}^2 :: \overline{AP}^2 : \overline{MP}^2$, et à cause de la proportion continue AP : PM :: PM : PB, on aura $\overline{AP}^2 : \overline{PM}^2 ::$ AP : PB; donc *cer.* AP : *cer.* MP :: AP : PB; donc *cer.* MP × AP = *cer.* AP × PB. Substituant cette valeur dans la derniere expression du segment sphérique, on aura $MAm = \frac{cer.\ AP \times PB}{3} + \frac{cer.\ AP \times AC}{3}$ $= cer.\ AP \times \frac{PB + AC}{3}$; mais PB = 2 AC — AP, ainsi $MAm = cer.\ AP \times \left(AC - \frac{AP}{3}\right)$. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

462. On pourroit faire des applications de tout ce qu'on vient de voir sur la solidité des secteurs et segments sphériques, aux secteurs ou segments de pans de voûtes triangulaires, et de-là aux voûtes qui en sont composées; mais ce détail pourroit devenir trop long: il nous suffit d'avoir montré l'analogie complette qui se trouve entre ces solides et leurs différentes parties avec la sphere et les solides correspondants. Nous allons examiner les rapports des solides en général, et en particulier des solides semblables.

THÉORÊME VI.

463. *Deux pyramides triangulaires* ABCD, AFGL (*fig.* 150), *qui ont un angle solide commun en* A, *sont entre elles comme les produits*

des trois côtés qui renferment ces angles solides; c'est-à-dire que l'on aura ABCD : AFGL :: AB × AC × AD : AF × AG × AL.

DÉMONSTRATION.

Par l'extrémité G d'un des côtés de la plus petite pyramide, et par l'arête BD de la seconde opposée à ce point, soit conçu un plan BGD qui donnera une nouvelle pyramide BGAD. Cette derniere, en prenant le point B pour son sommet, aura son sommet commun avec la pyramide ABCD considérée comme ayant aussi son sommet au point B; donc ces pyramides ayant même hauteur, seront entre elles comme leurs bases, qui sont les triangles ADC, ADG; et parceque ces derniers ont aussi même hauteur, ayant le sommet au point D, ils seront entre eux comme leurs bases AC, AG : on aura donc ABCD : ABGD :: AC : AG. Si l'on compare présentement la pyramide ABGD avec la pyramide AGFL, en les considérant comme ayant leur sommet au même point G, elles seront entre elles comme les triangles BAD, FAL qui leur servent de base, ou comme les produits AB × AD, AF × AL, puisque ces triangles ont un angle commun en A (n°. 296); on aura donc cette nouvelle proportion ABGD : AGFL :: AB × AD : AF × AL; multipliant cette proportion par la premiere, et divisant l'antécédent et le conséquent du premier rapport par ABGD, on aura ABCD : AFGL :: AC × AB × AD : AG × AF × AL; c'est-à-dire que *les deux tétrahedres qui ont un angle commun, sont entre eux*

donc $\overline{AF}^3 = \frac{m}{n}\overline{AB}^3$; donc, en tirant les racines de part et d'autre, on aura $AF = AB \times \sqrt[3]{\frac{m}{n}}$; c'est-à-dire que le côté inconnu AF correspondant au côté AB, est égal à ce côté multiplié par la racine cubique du rapport qui doit régner entre les solides. Il faut donc assigner géométriquement la racine cubique du rapport de *m* à *n*, si l'on veut une solution géométrique du problême, ou se contenter de la solution arithmétique donnée par l'expression $AF = AB \times \sqrt[3]{\frac{m}{n}}$. Ce côté une fois déterminé, on trouvera de même arithmétiquement tous les autres par une simple proportion (n°. 466). C. Q. F. T. et D.

Premier Scholie.

468. Ce problême est un des plus fameux de la géométrie des anciens; il est connu sous le nom de *problême de la duplication du cube;* ce qu'il faut néanmoins entendre d'une maniere plus générale, en le regardant comme celui de *trouver un solide semblable à un autre, et qui ait avec lui un rapport donné.* On s'est occupé long-temps des moyens de le résoudre par le secours de la regle et du compas; mais les géometres, qui se sont livrés à cette recherche, ont bientôt apperçu qu'il y auroit une absurdité à le tenter par cette voie, et l'ont réduit à celui des *deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données*, parcequ'il est précisément le même, comme on va le voir tout à l'heure. Ils ont en-

suite indiqué diverses solutions méchaniques, et donné des solutions rigoureuses par les sections coniques combinées avec le cercle, ou par d'autres courbes plus élevées. Il nous suffira de faire voir ici comment ce problême se réduit à trouver la premiere des deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données.

Soient donc deux droites AB et DE (*fig.* 151), entre lesquelles on suppose deux lignes BC, CD moyennes proportionnelles; on aura d'abord cette premiere proportion AB : BC :: AB : BC, ensuite par hypothese . . AB : BC :: BC : CD, et parceque BC : CD :: CD : DE, on a encore cette troisieme analogie, AB : BC :: CD : DE; donc en multipliant par ordre ces trois proportions, on aura celle-ci $\overline{AB}^{3} : \overline{BC}^{3} :: AB : DE$; donc si DE : AB :: m : n, on aura aussi $\overline{AB}^{3} : \overline{BC}^{3} :: n : m$; donc $\overline{BC}^{3} = \frac{m}{n}\overline{AB}^{3}$, qui est la même expression que nous avons trouvée tout à l'heure pour AF; donc le problême considéré géométriquement se réduit à trouver la premiere des deux moyennes proportionnelles entre la ligne AB prise pour côté homologue, et celle qui auroit avec cette ligne le rapport demandé. Quoique nous sachions depuis près de vingt siecles, qu'il est impossible, comme on vient de le dire, d'y arriver par la regle et le compas, cela n'empêche pas que tous les jours il ne se trouve des éleves qui ont le bonheur de découvrir ces solutions, et qui s'obstinent à demander justice aux

académies qui ont eu quelquefois la bonté de les écouter.

SECOND SCHOLIE.

469. C'est encore d'après les principes que l'on vient d'exposer que l'on a construit sur le compas de proportion la ligne nommée *ligne des solides*. Son usage est de servir à trouver des solides qui aient avec d'autres des rapports donnés, en nombres entiers seulement depuis 1 jusqu'à 64. Quoique la géométrie des courbes fournisse des méthodes rigoureuses de déterminer les différentes portions de cette ligne, il est néanmoins beaucoup plus facile, et tout aussi exact dans la pratique, de trouver par l'arithmétique tous les points que l'on veut marquer sur cette ligne. Pour cela il suffit de calculer à un 1000eme ou à un 10000eme près les racines cubiques des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. en supposant la ligne comprise entre le centre du compas, et le point marqué 1, divisée en un même nombre de parties égales. Ces racines ainsi déterminées, et mesurées sur une échelle bien divisée de ces parties, donneront la position exacte des points que l'on demande. Il est aisé de voir que les nombres 2, 3, 4, étant les racines cubiques des cubes 8, 27, 64, déterminent sur la ligne des solides les mêmes nombres 8, 27, 64. Quant à l'usage de cette ligne, après ce que nous venons de voir, il ne doit souffrir aucune difficulté. Supposons qu'il s'agisse de trouver le rayon d'une sphere qui soit à une autre dans une raison donnée, comme de 5 à

3; j'ouvrirai le compas de proportion, de maniere que la distance de 3 à 3 sur la ligne des solides, soit égale au rayon de la sphere donnée: celle des points 5, 5 sur la même ligne, sera le rayon de la sphere demandée. Cette ligne peut se construire très exactement au moyen de la table des racines cubiques que nous avons jointe ci-après, avec celle des racines quarrées.

CHAPITRE V.

Des solides réguliers.

470. On appelle *solides réguliers les corps dont tous les angles solides sont égaux, et dont toutes les surfaces sont égales.*

Corollaire I.

471. Il suit de cette définition que les surfaces planes qui terminent ces corps, doivent être des polygones réguliers tous égaux entre eux pour chaque espèce de solide régulier; car sans cela ces corps ne présenteroient pas de toutes parts la même figure, ce qui est pourtant nécessaire dans les solides ainsi dénommés.

Corollaire II.

472. Il n'en est pas des solides réguliers comme des polygones de même dénomination, quoique les premiers soient dans les solides ce que les seconds sont dans les surfaces. En effet rien ne limite le nombre des côtés des polygones réguliers, au lieu que celui des corps de cette espece est par sa nature essentiellement très borné. Cela vient de ce que, 1° il faut au moins trois angles plans pour former un angle solide; 2° de ce que tout angle solide doit valoir moins que 360° dans la somme des angles plans dont il est formé; 3° enfin de ce que les angles

PROBLÈME I.

477. *Trouver le rapport du côté du tétrahedre au diametre de la sphere à laquelle il peut être inscrit*, (*pl. X, fig.* 152).

SOLUTION.

Soit ABDE, le tétrahedre régulier inscrit dans une sphere. Du sommet A de cette pyramide, soit abaissée la droite AGF perpendiculaire au plan du triangle BDE base du tétrahedre, et qui passera par le centre de cette base comme par celui de la sphere. Cela posé, rappellons-nous que si l'on désigne par l'unité le rayon d'un cercle, le côté du triangle équilatéral inscrit au même cercle, sera exprimé par $\sqrt{3}$; on aura donc pour le cercle dans lequel est inscrit le triangle BDE; $\sqrt{3} : 1 ::$ BD ou AB : BG $= \frac{AB}{\sqrt{3}}$. Concevant de plus le triangle rectangle ABF inscrit au demi-cercle ABF, on aura AG : AB :: AB : AF; ainsi pour avoir le rapport du côté du tétrahedre avec le diametre de la sphere, tout se réduit à trouver celui de AG à AB. Or, à cause du triangle rectangle AGB, $\overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BG}^2 = \overline{AB}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{3} = \frac{2\overline{AB}^2}{3}$;

donc $\overline{AG}^2 : \overline{AB}^2 :: \frac{2}{3} : 1 :: 2 : 3$; donc AG : AB :: $\sqrt{2} : \sqrt{3}$; donc aussi $\sqrt{2} : \sqrt{3} ::$ AB : AF, c'est-à-dire que le côté du tétrahedre est au diametre de la sphere :: $\sqrt{2} : \sqrt{3}$. C. Q. F. T. et D.

COROLLAIRE.

478. Puisque le triangle rectangle ABF est semblable au triangle aussi rectangle AGB, et donne AF : AB :: AB : AG; on aura $\overline{AF}^2 : \overline{AB}^2$, AF : AG : ou 3 : 2 :: AF : AG; donc la hauteur du tétrahedre est égale aux deux tiers du diametre de la sphere à laquelle il est inscrit.

PROBLÈME II.

PROBLÊME II.

479. *Trouver le rapport du côté du cube au diametre de la sphere à laquelle on le suppose inscrit* (*fig.* 153).

SOLUTION.

Soit le cube ABDEFGIK; soit tirée dans le plan de sa base la diagonale AD; et par les angles solides opposés du même cube, la diagonale AI qui sera le diametre de la sphere: désignant par l'unité le côté du cube, on aura $AD = \sqrt{2}$ et $AI = \sqrt{3}$; donc AI: AB :: $\sqrt{3}$: 1, et $\overline{AI}^2 = 3\,\overline{AB}^2$; d'où il suit que le quarré du diametre de la sphere est triple du quarré qui sert de base au côté du cube qui lui est inscrit. C. Q. F. T. et D.

PROBLÊME III.

480. *Trouver le rapport du côté de l'octahedre régulier avec le diametre de la sphere* (*fig.* 154).

SOLUTION.

Soit l'octahedre ABDEFG que nous supposons inscrit dans une sphere. A cause de l'égalité de tous ses angles solides et de toutes ses faces, il est visible que les diagonales AG, BE, DF sont chacune égale au diametre de la sphere. Il n'est pas moins visible que le triangle isoscele ABG est rectangle en B, et donne AG: AB :: $\sqrt{2}$: 1, ou AB : AG :: 1 : $\sqrt{2}$; donc *le côté de l'octahedre est au diametre de la sphere comme le côté du quarré est à sa diagonale.* C. Q. F. T, et D.

PROBLÊME IV.

481. *Trouver le rapport du côté du dodécahedre avec le diametre de la sphere à laquelle il est inscrit* (*fig.* 155).

SOLUTION.

Soient A et B deux angles solides du dodécahedre, formés chacun par les angles plans de trois pentagones réguliers; savoir l'angle A par les pentagones ABCDE, AEFGH et ABKIH; et l'angle B par les mêmes pentagones ABCDE, ABKIH et le pentagone BCMLK; soient de plus tirées dans chacune de ces figures les diagonales AC, CE, BH, IK et EH, CK; toutes égales entre elles, à cause de l'égalité parfaite de toutes les faces du dodécahedre et de tous ses angles solides: il est de toute nécessité que la figure CEHK soit un quarré parfait, lequel contient six triangles ABC, BCE, ABH, BHK, EAH et CBK; donc, puisque les douze faces du dodécahedre renferment ensemble six triangles comme ceux qu'on vient de nommer, si l'on fait une opération semblable aux autres angles du dodécahedre, on inscrira dans ce solide un cube parfait qui sera aussi inscrit dans la sphere. Mais nous savons déja que le diametre de la sphere est au côté du cube comme $\sqrt{3} : 1$; cherchons donc le rapport du côté du cube avec celui du pentagone ABCDE, ou de la ligne EC avec la ligne AB. Pour cela, j'observe que les triangles BAE, BOA sont isosceles et semblables, puisque l'on a dans le premier BA = AE, et dans le second BO = OA; donc ayant un angle commun en B, ils sont semblables, et donnent BE : BA :: BA : BO; de plus il est encore visible que le triangle AEO est isoscele à cause des angles EAO, EOA qui sont égaux, puisqu'ils ont des mesures égales par la nature du pentagone; donc on aura EO = EA = AB; donc en mettant EO pour AB dans la proportion ci-dessus, elle deviendra BE : OE :: OE : OB. On démontrera de même que l'on auroit AC : CO :: CO : AO; d'où il suit que les deux diagonales d'un pentagone régulier se coupent réciproquement en moyenne et extrême raison; donc le côté du cube est au côté du dodécahedre, comme une ligne quelconque est à la grande partie de cette même ligne divisée en moyenne et extrême raison, ou comme $1 : \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$;

ainsi en nommant D le diametre de la sphere à laquelle nous supposons notre dodécahedre inscrit, nous aurons les deux proportions D : BE :: $\sqrt{3}$: 1, et BE : AB :: 1 : $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; donc en les multipliant par ordre, on aura D : AB :: $\sqrt{3}$: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ :: $2\sqrt{3}$: $-1+\sqrt{5}$, c'est-à-dire que le côté du dodécahedre est au diametre de la sphere, comme $-1+\sqrt{5}$ est à $2\sqrt{3}$. C. Q. F. T. et D.

PROBLÊME V.

482. *Trouver le rapport du côté de l'icosahedre avec le diametre de la sphere (fig. 156).*

SOLUTION.

Soit ABDEFG l'un des angles solides de l'icosahedre, formé par cinq angles plans de triangles équilatéraux; il est visible que les bases de ces triangles formeront un pentagone régulier BDEFG; et si du sommet A de l'angle solide on abaisse une perpendiculaire AC sur ce plan, cette ligne passera par le centre de la sphere, et menant BL à angles droits sur AB, AL sera le diametre de la sphere. Cela posé, à cause des triangles rectangles ABL, ACB semblables, on aura AL : AB :: AB : AC; donc il y a même rapport entre le côté de l'icosahedre et le diametre de la sphere à laquelle il est inscrit qu'entre la ligne AC et la ligne AB. Mais à cause du triangle rectangle ACB, on a $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$, et AB ou BD est le côté du pentagone régulier inscrit au cercle dont CB est le rayon; donc par le (n° 275) la ligne AC est le côté du décagone régulier inscrit au même cercle, et par le même n°, AB : AC :: $\frac{(5-\sqrt{5})}{2}$: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou :: $\sqrt{(5-\sqrt{5})}$: $-1+\sqrt{5}$; donc AL : AB :: $\sqrt{(5-\sqrt{5})}$: $-1+\sqrt{5}$. Ainsi ce dernier rapport est celui du diametre de la sphere au côté de l'icosahedre. C. Q. F. T. et D.

PROBLÊME VI.

483. *Trouver dans un même cercle les côtés des cinq corps réguliers inscrits à une même sphere engendrée par la révolution de ce demi-cercle autour de son diametre* (*fig.* 157).

SOLUTION.

Soit divisé le diametre AB du cercle donné en un point D, de maniere que AD soit à BD :: 2 : 1; puis ayant élevé par ce point la perpendiculaire DF, soient tirées les cordes AF et BF: ces lignes seront les côtés respectifs du tétrahedre et de l'hexahedre; car on aura AB : AF :: AF : AD; et par conséquent $\overline{AB}^2 : \overline{AF}^2 :: AB : AD :: 3 : 2$, par construction; donc AB : AF :: $\sqrt{3} : \sqrt{2}$; or, ce rapport est aussi celui du diametre de la sphere au côté du tétrahedre (n° 477); donc 1° AF est le côté du même tétrahedre. On a pareillement AB : BF :: BF : BD; donc $\overline{AB}^2 : \overline{BF}^2 :: AB : BD :: 3 : 1$, par construction; donc AB : BF :: $\sqrt{3} : 1$, et par conséquent BF est le côté du cube inscrit dans la même sphere (n° 479). 2° Ayant élevé par le centre du cercle le rayon CG perpendiculaire au diametre AB, et tiré AG ou BG, chacune de ces lignes sera le côté de l'octahedre, puisque AB : BG :: 2 : $\sqrt{2}$ ou :: $\sqrt{2}$: 1, et que ce rapport est aussi celui du côté du cube au diametre de la sphere à laquelle il est inscrit (n° 480). 3° Si l'on divise la ligne BF en moyenne et extrême raison au point K, sa grande partie BK sera le côté du dodécahedre inscrit à la sphere dont AB est toujours le diametre (n° 481). Enfin pour déterminer le côté de l'icosahedre; à l'extrémité du diametre AB, j'éleve la tangente AL que je fais égale au même diametre, je tire CL, et du point A la corde AM qui sera le côté cherché de l'icosahedre. Pour le démontrer, on se rappellera que nous avons fait voir au problême V, qu'il y a même rapport du côté de l'icosahedre au diametre de la sphere que du côté du dodécagone régulier au pentagone régulier inscrit au même cercle. Cela posé,

abaissons MI perpendiculaire au diametre, et faisons attention que AL étant double de AC, MI sera double de CI; donc (n° 271), si l'on prend MI pour rayon, AI sera la grande partie de cette ligne divisée en moyenne et extrême raison; donc, puisque le triangle rectangle AIM donne $\overline{AM}^2 = \overline{MI}^2 + \overline{AI}^2$, AM sera le côté du pentagone régulier inscrit au cercle dont MI est le rayon; donc, puisque l'on a AB : AM :: AM : AI, il s'ensuit que cette corde AM est le côté de l'icosahedre (n° 482). C. Q. F. 5° D.

SCHOLIE.

484. On pourroit pousser beaucoup plus loin la théorie des corps réguliers. Il seroit facile, d'après ce qu'on vient de voir, d'en trouver les développements, ainsi que les rapports de leurs solidités, soit entre eux, soit à l'égard de la sphere à laquelle ils sont inscrits. Ceux qui voudroient de plus grands détails peuvent consulter le quinzieme livre des éléments d'*Euclide*, où ils trouveront nombre de problêmes sur l'inscription réciproque de ces corps les uns aux autres. Ils peuvent aussi voir ce qui a été donné sur cette matiere par le comte de *Foix de Candale* dans son Euclide in-fol. imprimé à Paris en 1738. La même matiere a aussi été traitée de la maniere la plus étendue par *A. Sharp*, géometre anglois, qui publia en 1718 un savant ouvrage sur les séries qui ont rapport au cercle et sur les solides réguliers, ainsi que sur tous ceux qui se dérivent de ceux-ci par des sections faites par différents plans à leurs angles solides. Le fameux *Kepler*, astronome allemand, a aussi cultivé avec soin cette théorie, ainsi qu'on peut le voir dans son ouvrage intitulé *Harmonices mundi*. On y trouvera les développements d'un grand nombre de corps qu'on peut nommer *symmétriques*, et qui prennent naissance dans les corps réguliers. Sa maniere de considérer ces différents corps étoit très différente de celle de tous les géometres de son temps. Pénétré des idées de *Platon* sur les formes substantielles et sur les éléments, ainsi que sur leurs symboles, c'étoit pour approfondir la théorie de l'univers, et

connoître les mouvements des planetes qu'il étudioit celle des solides réguliers. C'est quelque chose de bien étonnant que ce soit à de pareilles idées que nous soyons redevables des deux plus belles loix auxquelles ces planetes sont soumises dans leurs mouvements, connues sous le nom de *loix de Kepler*, et démontrées depuis par *Newton*. En général, cette considération que l'on regardoit, il y a peu d'années, comme purement abstraite, et n'ayant d'existence que dans la tête des géometres; cette considération, dis-je, commence à mériter une attention particuliere, depuis que l'étude de l'histoire naturelle nous a fait connoître différentes substances qui donnent des corps réguliers dans leurs crystaux, et que l'on a ramené un grand nombre d'autres crystallisations à ces premieres. Voyez la Crystallographie de M. *de Romé de Lille*, et un mémoire de M. l'abbé *Havy* sur cette matiere. On peut aussi voir ce qui a été donné sur cet objet par *Daniel Barbaro* dans sa Perspective imprimée à Venise en 1548. Passons à des recherches plus utiles pour ceux auxquels cet ouvrage est destiné.

CHAPITRE VI.

Des corps irréguliers.

485. Il est rare d'avoir à mesurer des corps absolument réguliers, ou même symmétriques. La variété infinie des combinaisons respectives des plans ou surfaces courbes, les différentes pénétrations d'un nombre presque infini de solides de toutes sortes de formes, mettroient toutes les regles de la géométrie en défaut, si l'on se contentoit de ce que nous avons donné jusqu'ici. C'est donc rendre un service réel à la géométrie pratique, que de démontrer comment on doit s'y prendre pour mesurer, d'une maniere suffisamment exacte, les différentes especes de solides irréguliers qui se rencontrent presque à chaque instant dans les calculs les plus fréquents, et en particulier

dans ceux que l'on trouve dans les déblais et les remblais. Pour donner à cette partie le plus de généralité et d'utilité dont elle est susceptible, nous imaginerons une formation qui, quoiqu'uniforme pour tous ces corps, puisse néanmoins admettre une très grande variété dans leurs différentes figures, et qui soit en même temps analogue à la maniere dont ces corps à mesurer auroient pu se former sur le terrain. C'est ce que nous allons expliquer dans les définitions suivantes.

DÉFINITIONS.

486. Soit un quadrilatere quelconque ABCD (*fig.* 153) aux angles duquel s'élevent perpendiculairement à son plan des perpendiculaires A*a*, B*b*, C*c*, D*d*. Ayant joint toutes ces lignes par les droites *ab*, *ad*, *bc*, *cd*; si l'on imagine qu'une regle parcourt les côtés opposés *ab*, *dc* dans le même temps, en sorte qu'après avoir été posée sur *ad*, elle arrive en *bc*, le solide terminé par le quadrilatere ABCD, les quatre plans verticaux A*ab*B, B*bc*C, C*cd*D, D*da*A, et la surface courbe décrite par le mouvement de la regle, sera nommé *corps irrégulier*, à cause des inégalités qui se trouvent dans toutes les quantités qui le déterminent.

COROLLAIRE.

487. On voit par cette formation des corps irréguliers qu'ils peuvent varier de formes à l'infini, suivant la diversité des quadrilateres qui leur servent de bases, et suivant le nombre des hauteurs verticales, et les rapports que ces lignes peuvent avoir entre elles. On voit de plus que la maniere dont on les conçoit formés, est la même pour tous, en sorte que la surface supérieure peut être courbe dans plusieurs sens, ou plane dans certaines circonstances; mais toujours telle que tous les points de cette surface compris de M en N, seront en ligne droite, si l'on a *a*M : *b*M :: *d*N : *c*N. Quoiqu'il fût plus général de rechercher d'abord la solidité d'un de ces corps, lorsque la base est un quadrilatere quelconque, néanmoins

comme cette théorie a plus pour objet des méthodes pratiques suffisamment exactes, que la plus grande rigueur géométrique, nous commencerons par mesurer un corps dont la base seroit un trapeze qui a deux côtés paralleles, et nous y ramenerons facilement le premier, dont la cubature seroit d'une recherche un peu trop difficile pour ces éléments.

PROBLÈME I.

488. *Trouver la solidité d'un corps irrégulier dont la base est un trapeze à deux côtés paralleles* (*fig.* 159).

SOLUTION.

Soient prolongées les deux hauteurs verticales Aa, Dd, de maniere que aA′ soit égale à Dd, et que dD′ soit égale à Aa, et soit fait la même opération aux lignes Bb, Cc; soient de plus tirées les droites A′B′, B′C′, C′D′, D′A′, qui formeront un quadrilatere dont les quatre côtés seront essentiellement dans un même plan à cause de l'égalité des lignes AA′, DD′, et des lignes BB′, CC′. Concevons de plus qu'on ait fait passer un plan par les droites opposées AA′, CC′, qui partagera le solide ABCD, A′B′C′D′ en deux troncs de prismes triangulaires. Il est aisé de voir que par notre construction le solide que nous venons de former est double du solide à mesurer ABCD *dabc*; car ces solides auront même nombre d'éléments, et chaque élément de l'un sera égal à chaque élément de l'autre. Reste donc à mesurer chaque tronc de prismes qui composent le solide total, et à prendre la moitié du produit; pour plus de facilité, faisons Aa = a, Bb = b, Cc = c, Dd = d. Cela posé, le tronc de prisme ABC C′B′A′ sera égal au produit de sa base par le tiers des trois hauteurs (n° 433). Ainsi ce corps sera égal à ABC $\times \frac{2b+2c+a+d}{3}$, de même le tronc de prisme ADC C′D′A′ sera égal à ADC $\times \frac{2a+2d+b+c}{3}$; donc les deux solides ensemble seront égaux à la somme de ces

deux produits, dont la moitié sera la solidité du corps irrégulier dont la base est un trapeze à deux côtés paralleles; on aura donc ABCD*abcd* = ABC . . . . . $\times \frac{2b+2c+a+d}{6} +$ ADC $\times \frac{2a+2d+b+c}{6}$; ce qui fournit la regle suivante.

489. *Partagez la base du solide à mesurer en deux triangles par une diagonale quelconque, et prenant pour base de chaque triangle le côté sur lequel il se trouve une hauteur qui n'appartient qu'à ce triangle, ajoutez ensemble deux fois les hauteurs qui se trouvent sur cette base, et une fois les hauteurs qui sont sur la base de l'autre triangle; prenez le sixieme du tout, multipliez par ce quotient le triangle qui sert de base, et vous aurez la solidité de chaque tronc de prisme triangulaire; la somme des solidités de ces deux prismes sera la solidité du corps à mesurer.*

COROLLAIRE I.

490. La base étant toujours un trapeze à deux côtés paralleles, s'il n'y a que trois hauteurs A*a*, D*d*, C*c*; il n'y a qu'à faire dans la formule $b = o$, et le solide sera ABC $\times \frac{2c+a+d}{6} +$ ADC $\times \frac{2a+2d+c}{6}$: s'il n'y a que deux hauteurs A*a*, D*d* sur un même triangle, on aura pour la solidité du corps ABC $\times \frac{a+d}{6} +$ ADC $\times \frac{2a+2d}{6}$. S'il a deux hauteurs, mais opposées diagonalement comme A*a*, C*c*, il n'y a qu'à faire dans la formule b et d, chacune égale à zéro, et l'on aura pour la solidité du corps ABC $\times \frac{a+2c}{6} +$ ADC $\times \frac{2a+c}{6}$; enfin s'il n'y a qu'une seule hauteur A*a*, on aura pour le solide ABC $\times \frac{a}{6} +$ ADC $\times \frac{2a}{6} =$ ABC $\times \frac{a}{6} +$ ADC $\times \frac{a}{3}$.

COROLLAIRE II.

491. Si la base est un parallélogramme, alors les deux

triangles ABC et ADC deviennent égaux, et supposant d'abord quatre hauteurs au solide, on aura pour l'expression de sa solidité ABC $\times \frac{3a+3b+3c+3d}{6} =$ ABC $\times \frac{a+b+c+d}{2}$, ou encore 2ABC $\times \frac{a+b+c+d}{4}$; mais 2 ABC est la surface du parallélogramme qui sert de base au solide; donc *la solidité de ce corps sera égale au produit de sa base par le quart des quatre hauteurs, ou par le quart des trois hauteurs*, s'il n'y en a que trois, *ou par le quart des deux hauteurs*, s'il n'y en a que deux, soit qu'elles se trouvent sur un même côté, soit qu'elles soient opposées diagonalement; enfin, si le corps irrégulier n'a qu'une seule hauteur, il faudra *multiplier sa base par le quart de cette même hauteur.*

COROLLAIRE III.

492. Lorsque le solide a pour base un trapeze dont aucuns côtés ne se trouvent paralleles, alors, pour plus de facilité, il est bon de le décomposer en deux autres, dont l'un ait pour base un trapeze ADFB (*fig.* 158), dont les côtés AB, DF seront paralleles, qui se mesurera comme celui dont on vient de démontrer la cubature, et dont l'autre ayant pour base le triangle DFC, se mesurera comme un tronc de prisme triangulaire, quoiqu'il en differe tant soit peu à cause que la surface *dcf* est une surface courbe.

PREMIER SCHOLIE.

493. J'ai vu quelques personnes mesurer le corps irrégulier dont la base est un trapeze quelconque, de la même maniere que celui dont la base a deux côtés paralleles; mais la regle que nous avons donnée ne peut s'appliquer à ce corps que dans le cas où la surface ABCD seroit une surface plane, ce qui ne peut jamais avoir lieu quand le trapeze ABCD n'a pas deux côtés paralleles. Ceux qui seroient curieux de connoître la méthode rigoureuse de mesurer ce solide, n'ont qu'à recourir au

mémoire qui se trouve sur les propriétés de ces corps, dans le quatrieme volume des mémoires présentés à l'académie par les savants étrangers, pag. 623. On y trouvera nombre de propriétés de ces sortes de solides qui peuvent mériter l'attention des géometres, et que nous ne pouvons démontrer ici.

SECOND SCHOLIE.

494. Si le solide à mesurer a pour base un triangle, il faudra, pour en avoir le cube, *multiplier sa base par le tiers des trois hauteurs*, s'il a trois hauteurs, *ou par le tiers des deux hauteurs*, s'il en a deux, *ou par le tiers de sa hauteur*, s'il n'en a qu'une : ce qui suit des nos 429, 433. On peut aussi mettre au rang de ces solides le tronc de pyramide à bases paralleles du n° 428. On a vu qu'il étoit égal à trois pyramides de même hauteur que le tronc, dont l'une a pour base la base inférieure, l'autre la base supérieure, et la troisieme une base moyenne géométrique. Dans la pratique, pour avoir cette base moyenne géométrique, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à l'extraction des racines quarrées : il suffira de multiplier la base de l'un de ces triangles par la moitié de la perpendiculaire abaissée sur le côté homologue de l'autre, ce qui se déduit de ce que les triangles BAC, DEF sont semblables dans un tronc de pyramide à bases paralleles. En effet, supposant que l'on prenne les côtés AB, DE (*fig.* 143) pour les bases des triangles BAC, DEF, les perpendiculaires CG, FL en seront les hauteurs. On aura donc $BAC = \frac{AB \times CG}{2}$, et $DEF = \frac{DE \times FL}{2}$, dont la surface moyenne géométrique entre ces deux bases $= \sqrt{\left(\frac{AB \times CG}{2} \times \frac{DE \times FL}{2}\right)}$: il faut donc voir si l'on peut transformer cette expression en un quarré parfait ; or il est évident que les triangles rectangles CGA, FLE sont semblables à cause des angles en A et en E, qui sont égaux. Donc on aura CG : FL :: AC : EF, ou :: AB : DE ; donc on aura $CG \times DE = FL \times AB$; donc en substituant cette valeur dans le radical . . . . . .

$\sqrt{\left(\frac{AB \times CG \times DE \times FL}{4}\right)}$, il viendra pour l'aire du triangle moyen géométrique entre BAC et DEF, $\sqrt{\left(\frac{\overline{AB}^2 \times \overline{FL}^2}{4}\right)} = \frac{AB \times FL}{2}$. Il en seroit de même pour la solidité d'un cône tronqué à bases paralleles : il faudroit, pour avoir le cercle moyen géométrique entre ses deux bases, multiplier la circonférence de l'un par la moitié du rayon de l'autre.

495. Lorsque la base est un polygone irrégulier quelconque, on pourra mesurer la solidité du corps irrégulier établi sur cette base, en le décomposant en autant de troncs de prismes triangulaires que l'on pourra trouver de triangles dans sa base par des lignes diagonales, *et chaque tronc de prisme sera égal au produit de sa base par le tiers des trois hauteurs.*

Après avoir donné les regles générales de la mesure des surfaces dans le second livre de ces éléments, et celles de la mesure des solides dans celui-ci, il est à propos de donner en peu de mots les regles particulieres relatives aux mesures établies par l'usage, et aux subdivisions de leurs unités principales. Ces regles forment une partie de la géométrie pratique, que l'on nomme le toisé, et c'est ce que nous allons expliquer. Mais auparavant nous joindrons ici une table des racines quarrées et cubiques des nombres depuis un jusqu'à cent, calculées à sept décimales. Ces tables font connoître par quels nombres il faut multiplier les dimensions d'une surface ou d'un solide pour en avoir une autre qui ait avec la premiere un rapport donné. Elles peuvent aussi servir à vérifier les lignes des plans et des solides du compas de proportion en considérant la ligne comprise depuis le centre jusqu'au point marqué 1 sur chacune de ces lignes, divisée en 100,000 ou même 10000 parties égales. Par exemple, pour trouver un solide sept fois plus grand qu'un autre, je trouve dans les racines cubiques 1,9129312; ainsi la ligne prise pour mesure étant de 1000 parties égales, celle du solide sept fois plus grand sera très à-peu-près de 1912,9 ou 1913.

TABLE DES RACINES QUARRÉES ET CUBIQUES,

N.	R. quarrées.	R. cubiques.
1	1,0000000	1,0000000
2	4142136	2599205
3	7320508	4422496
4	2,0000000	5874011
5	2360680	7099759
6	4494897	8171206
7	6457513	9129312
8	8284271	2,0000000
9	3,0000000	0800837
10	1622777	1544347
11	3166248	2239801
12	4641016	2892286
13	6055513	3513347
14	7416574	4101422
15	8729833	4662121
16	4,0000000	5198421
17	1231056	5712816
18	2426407	6207414
19	3588989	6684016
20	4721359	7144177
21	5825757	7589243
22	6904158	8020393
23	7958315	8438670
24	8989795	8844991
25	5,0000000	9240177
26	0990195	9624960
27	1961524	3,0000000
28	2915026	0365889
29	3851648	0723168
30	4772256	1072325
31	5677644	1413806
32	6568543	1748021
33	7445626	2075343
34	8309519	2396118
35	9160798	2710663
36	6,0000000	3019272
37	0827625	3322218
38	1644140	3619754
39	2449980	3912114
40	3245553	4199519
41	4031242	4482172
42	4807107	4760266
43	5574385	5033981
44	6332496	5303483
45	7082039	5568933
46	7823300	5830479
47	8556547	6088261
48	9282032	6342411
49	7,0000000	6593057
50	0710678	6840314

N.	R. quarrées.	R. cubiques.
51	7,1414284	3,7084298
52	2111026	7325111
53	2801099	7562858
54	3484692	7797631
55	4161985	8029525
56	4833148	8258624
57	5498344	8485011
58	6157731	8708766
59	6811458	8929965
60	7459667	9148676
61	8102497	9364972
62	8740078	9578915
63	9372539	9790571
64	8,0000000	4,0000000
65	0622577	0207256
66	1240384	0412401
67	1853527	0615480
68	2462112	0816551
69	3066239	1015661
70	3666003	1212853
71	4261497	1408178
72	4852814	1601676
73	5440037	1793390
74	6023253	1983364
75	6602540	2171633
76	7177978	2358236
77	7749644	2543210
78	8317609	2726586
79	8881944	2908404
80	9442719	3088695
81	9,0000000	3267487
82	0553851	3444815
83	1104336	3620707
84	1651514	3795191
85	2195445	3968295
86	2736185	4140049
87	3273791	4310476
88	3808315	4479602
89	4339811	4647451
90	4868330	4814047
91	5393919	4979414
92	5916630	5143574
93	6436507	5306549
94	6953597	5468359
95	7467943	5629026
96	7979589	5788570
97	8488577	5947009
98	8994949	6104363
99	9498744	6260650
100	10,0000000	6415888

CHAPITRE VII.

Du toisé.

496. Dans les travaux publics et particuliers, presque toutes les étendues linéaires, superficielles ou solides, se mesurent à la *toise*, qui est une mesure fixe et déterminée, censée invariable par toute l'étendue du royaume. La toise linéaire sert à mesurer les longueurs des chemins, les distances quelconques, en un mot tout ce qui se mesure ou s'estime *à toise courante*, suivant l'expression générale des entrepreneurs. Les surfaces se mesurent à la *toise quarrée*, et les solides à la *toise cube*. Comme ces différentes mesures, quoique toujours subordonnées à la toise linéaire, sont néanmoins de différente nature; il est aisé de concevoir que chaque espece de toisé doit avoir ses regles particulieres. C'est pourquoi, avant de les exposer, et de les appliquer à des exemples, nous allons donner ici les définitions nécessaires pour les entendre.

§. Ier. Définitions.

497. La toise, comme le savent tous ceux qui sont dans le cas d'en faire usage, se divise en six parties égales qu'on appelle *pieds;* le pied en douze autres parties égales qu'on nomme *pouces;* le pouce en douze *lignes;* la ligne en douze

points ou *primes ;* chaque prime en douze *secondes*, et ainsi de suite, selon une progression *dodécuple* décroissante. Les premieres subdivisions de la toise s'expriment par les lettres initiales des signes qui les représentent jusqu'aux lignes, et les autres par de petits traits au-dessus du nombre qui leur convient : ce qui fournit la table suivante.

Les ingénieurs et architectes sont aussi dans l'usage de désigner les pouces par un petit *o*, placé au-dessus du nombre qui leur convient : nous suivrons cette méthode.

Une *toise*	vaut	6 *pieds* . . .	ou 6^{pi}.
Un *pied* . . .		12 *pouces* . .	ou 12°.
Un *pouce* . .		12 *lignes* . . .	ou 12^{l}.
Une *ligne* . .		12 *points* ou *primes*	ou $12^{'}$.
Une *prime* . .		12 *secondes* . .	ou $12^{''}$.
Une *seconde* .		12 *tierces* . .	ou $12^{'''}$.
		etc.	

Ainsi pour mesurer tout ce qui s'estime à toise courante, il n'y a qu'à appliquer la toise et ses différentes subdivisions sur la longueur à mesurer ; le nombre de toises, pieds, pouces et lignes que l'on trouvera, sera l'expression de l'étendue linéaire que l'on vouloit connoître.

§. II. *Du toisé des surfaces.*

498. La *toise quarrée*, étant une surface qui a une toise de long sur une toise de large, vaut 36 *pieds quarrés ;* le pied quarré vaut 144 *pouces quarrés ;* le pouce quarré 144 *lignes quarrées ;*

la ligne quarrée 144 *points* ou *primes quarrées*. Mais comme ces nombres forment une progression qui introduiroit dans le calcul des expressions fort compliquées, on a trouvé plus convenable de ramener les subdivisions de la toise quarrée à celles de la toise linéaire. On a donc divisé la toise quarrée en six rectangles égaux d'une toise de haut sur un pied de large, et l'on appelle ce rectangle un *pied de toise quarrée* ou une *toise-pied*. Chaque pied de toise quarrée se divise pareillement en douze rectangles d'une toise de haut sur un pouce de large, et se nomme *pouce de toise quarrée*, ou aussi *toise-pouce*. Le pouce de toise quarrée se divise en douze rectangles d'une toise de haut sur une ligne de large, et se nomme *ligne de toise quarrée* ou *toise-ligne*. Il en est de même des subdivisions au-dessous de celles-ci que l'on nomme *toise-prime*, *toise-seconde*, *toise-tierce*, etc. Ces sortes de subdivisions de la toise quarrée se désignent par les lettres initiales de leurs dimensions; ce qui fournit la table suivante :

1 *TT.* ou *toise quarrée* vaut	36^{pp} ou 36 *pieds quarrés*.
1 *Tpi.*	6^{pp} ou 864 *pouces quarrés*.
1 *To.*	$\frac{1}{6}{}^{pp}$ ou 72 *pouces quarrés*.
1 *Tli.*	6^{∞} ou 864 *lignes quarrées*.
1 *T'.*	$\frac{1}{6}{}^{\infty}$ ou 72 *lignes quarrées*.
1 *T''.*	6^{u} ou 864 *primes quarrées*.
1 *T'''.*	$\frac{1}{6}{}^{u}$ ou 72 *primes quarrées*.

Ces subdivisions une fois connues et bien désignées, on n'aura aucune difficulté à entendre la mesure des surfaces dont les dimensions sont données en toises et subdivisions de la toise, en

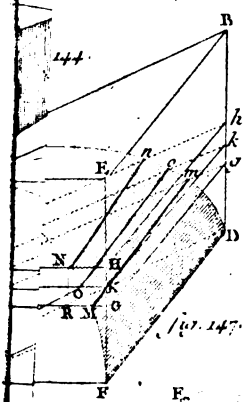


fig. 147.

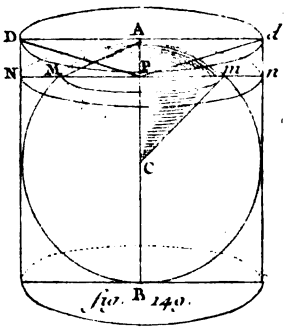


fig. 149.

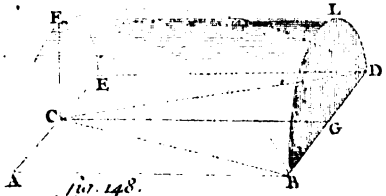


fig. 148.

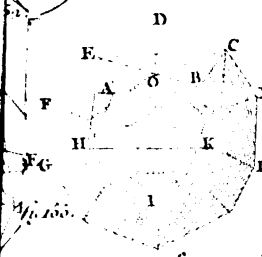


fig. 155.

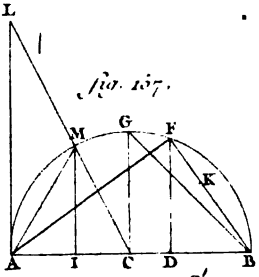
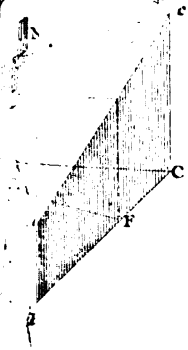


fig. 157.



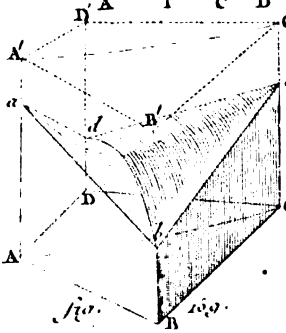


fig. 159.

en suivant d'ailleurs les principes de la multiplication par les parties aliquotes.

EXEMPLE PREMIER.

488. Soit proposé de trouver la surface d'un rectangle qui auroit 457 toises 5 pieds 8 pouces 9 lignes 6 points de long, sur 8 toises 5 pieds 7 pouces 10 lignes de haut. Voici comme on doit raisonner dans tous les cas pour trouver la surface de ces sortes de rectangles. La base d'un rectangle quelconque étant supposée toujours la même; s'il n'avoit qu'une toise de hauteur, il est visible que le même nombre qui exprime cette base comme étendue linéaire, exprimeroit aussi sa surface en toises quarrées, pieds, pouces, lignes et primes de toises quarrées, à cause de la hauteur du rectangle qui est ici l'unité : donc le rapport abstrait de la hauteur du rectangle à la toise exprime par quel nombre il faut multiplier la base ainsi considérée pour avoir la surface à mesurer en toises quarrées et subdivisions de la toise quarrée.

Ayant donc disposé, comme on le voit ici, le nombre de toises et de ses subdivisions qui font la hauteur du rectangle à mesurer au-dessous de celui de la longueur considérée comme multiplicande; je commencerai l'opération par les dernieres unités du multiplicande, à cause qu'il n'y a qu'un seul chiffre aux toises du multiplicateur; et j'aurai un premier produit qui sera égal au multiplicande considéré comme toises quarrées pris huit fois. Passant ensuite aux subdivisions de la toise dans ce multiplicateur, je les décom-

poserai en parties aliquotes de la toise, et ensuite en parties aliquotes les unes des autres ; ce qui me donnera autant de produits particuliers, tels qu'ils sont ici désignés, et leur somme $4095^{TT.}\ 0^{Tp.}\ 6^{To.}\ 11^{Tl.}\ 8^{T'}\ 8^{T''}\ 10^{T'''}$ exprimera le produit demandé avec la derniere précision.

$457^{T.}.\ 5^{p.}\ 8^{o.}.\ 9^{l.}\ 6^{l}$
$8^{T.}\ 5^{p.}\ 7^{o.}\ 10^{l.}\ 0^{l}.$

Produit du multiplic. par								
	3663	. 3	. 10	. 4	. 0.			
3^{pi}	228	. 5	. 10	. 4	. 9.			
$2^{p.}$	152	. 3	. 10	. 11	. 2.			
$6^{o.}$	38	. 0	. 11	. 8	. 9.	6.		
$1^{o.}$	6	. 2	. 1	. 11	. 5.	7.		
$6^{l.}$	3	. 1	. 0	. 11	. 8.	9	. 6.	
$2^{l.}$	1	. 0	. 4	. 3	. 10.	11	. 2.	
$2^{l.}$	1	. 0	. 4	. 3	. 10.	11	. 2.	

$4095^{TT.}\ 0^{Tp.}\ 6^{To.}\ 11^{Tl.}\ 8^{T'}\ 8^{T''}\ 10^{T'''}.$

Dans la pratique on négligeroit tout ce qui est au-dessous des *T.* lignes. Si l'on veut exprimer la même surface en toises quarrées, pieds, pouces et lignes quarrées ; rien ne sera plus facile d'après la table donnée ci-dessus. On multipliera toutes les subdivisions de rang pair à compter des toises par 6, et celles de rang impair par $\frac{1}{2}$, que l'on portera au rang immédiatement au-dessus, en prenant 72 pour chaque unité restante, dont on n'auroit pas pu prendre la moitié ; et l'on trouvera que le même rectangle exprimé en mesures quarrées, vaut $4095^{TT.}\ 3^{pp.}\ 70^{oo.}\ 53^{ll.}$

489. Lorsque le nombre des toises du multiplicateur est composé de plusieurs chiffres, on ne

peut pas commencer la multiplication par les dernieres unités du multiplicande, mais l'opération se fait toujours d'après les mêmes principes; c'est pourquoi nous ajouterons encore un autre exemple pour ce dernier cas, et les autres rentreront toujours dans l'un de ceux que nous avons expliqués.

EXEMPLE II.

490. Soit proposé de trouver la surface d'un rectangle dont la base est de $598^t\ 5^p\ 7^o\ 9^u$, et la hauteur $47^t\ 4^p\ 10^o\ 11^l$.

Ayant disposé le multiplicateur sous le multiplicande, comme on le voit ici, de maniere que les subdivisions de même espece soient placées les unes au-dessous des autres : à cause que le nombre des toises du multiplicateur 47 est composé de plus d'un chiffre; je le considere comme égale à $7 \times 6 + 5$, afin de pouvoir commencer l'opération par les dernieres unités du multiplicande, et je fais d'abord un faux produit du même multiplicande par le nombre 7, ce qui me donne $4192^{tt}\ 3^{tp}\ 6^{to}\ 3^{tl}$ à multiplier ensuite par 6, afin d'avoir le produit du multiplicande entier par 42 toises, au-dessous duquel on placera celui du même nombre par 5, derniere partie des toises du multiplicateur; ainsi il n'y a plus qu'à déterminer les parties du produit relatives aux subdivisions du multiplicateur, ce que je fais, comme on le voit, en prenant pour 3 pieds la moitié du multiplicande, considéré comme toises quarrées et parties de toises quarrées; pour 1 pied le tiers du dernier produit; pour 6 pouces la moitié du

produit d'un pied; et pour 4 pouces le tiers du même produit; pour 6 lignes le huitieme du produit de 4 pouces; enfin pour 3 lignes et pour 2 lignes, la moitié et le tiers de ce dernier. Ajoutant ensemble tous ces produits particuliers, excepté celui que nous avons dénommé faux produit, on aura pour la surface demandée $28640^{tt}\ 1^{tp}\ 11^{to}\ 10^{tl}\ 3^{t'}\ 2^{t''}\ 6^{t'''}$.

$598^{t} . 5^{p} . 7^{o} . 9^{l}$
$47 . 4 . 10 . 11.$

$4192^{tt} . 3^{tp} . 6^{to} . 3^{tl}$

Produit du multiplic. par

42^{t}	25155 . 3 . 1 . 6	
5^{t}	2994 . 4 . 2 . 9	
3^{p}	299 . 2 . 9 . 10 . 6	
1^{p}	99 . 4 . 11 . 3 . 6	
6°	49 . 5 . 5 . 7 . 9	
4°	33 . 1 . 7 . 9 . 2	
6^{l}	4 . 0 . 11 . 5 . 7 . 9	
3^{l}	2 . 0 . 5 . 8 . 9 . 10 . 6	
2^{l}	1 . 2 . 3 . 9 . 10 . 7	

$28640^{tt}\ 1^{pt}\ 11^{tp}\ 10^{tl}\ 3^{t'}\ 2^{t''}\ 6^{t'''}$
$6 \quad \frac{1}{2} \quad 6 \quad \frac{1}{2} \quad 6 \quad \frac{1}{2}$

$28640^{tt}\ 11^{pp} . 133^{oo} . 87^{ll}$

Pour réduire cette surface en mesures quarrées, on multipliera les toises-pieds par 6 et les toises-pouces par la fraction $\frac{1}{2}$, ce qui donnera des pieds quarrés; pour l'unité restante du nombre 11, dont on n'a pas pu prendre la moitié, on comptera 72 pouces quarrés; ce qui est évident, puisqu'un rectangle d'une toise de long sur un pouce de haut

contient ce même nombre de pouces quarrés. On multipliera de même 10^{tt} par 6 et 3^{t} par $\frac{1}{2}$, ce qui donnera encore des pouces quarrés à joindre aux 72 déja trouvés; et l'on comptera 72 lignes quarrées pour l'unité de 3 dont on n'a pas pu prendre la moitié; enfin opérant de même sur les deux dernieres subdivisions, on aura pour la surface totale de notre rectangle $28640^{tt}\ 11^{pp}\ 133^{oo}\ 87^{ll}$.

Si l'on vouloit faire la preuve de cette opération et de toutes autres semblables, il est évident qu'il faudroit diviser la surface totale trouvée par l'un des facteurs, et l'on doit retrouver l'autre facteur au quotient; mais comme cette opération exige des préparations pour débarasser le diviseur des subdivisions de l'unité; communément on aime mieux prendre une partie déterminée du multiplicande, comme sa moitié, son tiers ou son quart, que l'on la multiplie par le même multiplicateur; et l'on cherche si, en multipliant le nouveau produit par le nombre qui a servi de diviseur, on retrouve une quantité superficielle égale au produit premièrement déterminé. Comme cependant il importe de savoir faire la preuve de ces opérations par la division, et de connoître la maniere de préparer le diviseur à être incomplexe, nous l'appliquerons à l'exemple que l'on vient de donner. Soit donc proposé de diviser une surface de $28640^{tt}\ 1^{p}\ 11^{to}\ 10^{tl}\ 3^{t}\ 2^{t''}\ 6^{t'''}$ par $598^{t}\ 5^{p}\ 7^{o}\ 9^{l}$, longueur de notre rectangle à mesurer. A cause que les 9 lignes du diviseur équivalent à trois quarts de pouce, on multipliera le dividende et le diviseur par 4, ce qui donnera pour nouveau dividende . . .

11456^{tt} 1^{tp} 11to 5^{tl} $0^{t'}$ $10^{t''}$, et pour nouveau diviseur 2395^{t} 4^{p} 7° 0^{l} ; pour se débarasser des pouces du diviseur, on multipliera le diviseur et le dividende par 12, ce qui donnera pour nouveau dividende préparé 1374735^{tt} 5^{tp} 5to 0^{tl} $10^{t'}$, et pour second diviseur préparé 28749^{t} 1^{p} ; enfin pour chasser le pied qui reste encore au diviseur, on multipliera le dividende et le diviseur par 6, ce qui donnera pour dernier dividende réduit 8248415^{tt} 2^{tp} 6to 5^{tl}, et pour dernier diviseur aussi réduit 172495^{t}; faisant en effet la division de l'un par l'autre, on retrouvera au quotient 47^{t} 4^{p} 10° 11^{l}.

M. *de la Londe*, ingénieur du roi, a publié une méthode de toiser les surfaces et les solides qui abrege assez considérablement le calcul ; sur-tout lorsque les toises du multiplicateur sont exprimées par un seul chiffre : voici à quoi se réduit cette méthode.

Ayant écrit les dimensions de la surface à mesurer l'une au-dessous de l'autre, la premiere comme multiplicande et la seconde comme multiplicateur; doublez dans chacune les subdivisions de la toise, en commençant par les dernieres, et retenant dans chaque produit autant d'unités qu'il y a de fois 12, *pour les joindre aux unités supérieures; faites ensuite autant de produits particuliers que vous aurez de termes dans votre nouveau multiplicateur, en commençant l'opération par les dernieres unités du multiplicande, et plaçant ces produits successifs de maniere qu'ils se débordent toujours d'un rang vers la droite ; enfin ayant fait la somme de tous ces*

produits particuliers, prenez la moitié de tout ce qui sera au-dessous des toises quarrées, et vous aurez la surface demandée.

EXEMPLE PREMIER.

491. Soit proposé de trouver l'aire d'un rectangle qui a 8 toises 5 pieds 7 pouces 9 lignes de long sur 5 toises 3 pieds 8 pouces 11 lignes de large : ayant doublé les subdivisions de la toise au multiplicande et au multiplicateur, on aura pour l'un et pour l'autre les deux facteurs que l'on voit ici.

8^t	.	11^p	.	3°	:	6^l					
5	.	7	.	5	.	10					
44	.	8	.	5	.	6					
5	.	2	.	7	.	0	:	6			
		3	.	8	.	8	.	5	.	6	
				7	.	5	.	4	.	11	. 0
50	.	3	.	4	.	8	.	4	.	5	
50^t	.	1^p	.	8^p	.	4^l	.	2^l	.	2^{ll}	. 6^{lll}

Ainsi la surface totale est de 50 toises quarrées 1 pied de toise quarré 8 pouces 4 lig . 2^l 2^{ll} 6^{lll} de toise quarrée.

EXEMPLE II.

492. Soit le nombre 9 toises 5 pieds 4 pouces 8 lignes, à multiplier par 5 toises 3 pieds 8 pouces 9 lignes ; ayant doublé les subdivisions du multi-

plicande et du multiplicateur, on aura les deux nombres ci-dessous.

$9^t \cdot 10^p \cdot 9^o \cdot 4^l$
$5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6$

$49 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 8$
$5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4$
$4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 8$
$4 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 0$

$55 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4$
$55^{tt} \cdot 3^{tp} \cdot 10^{t} \cdot 3^{tl} \cdot 3^{t'} \cdot 8^{t''}$

Cette pratique pourra servir de preuve pour vérifier les toisés superficiels calculés par les méthodes ordinaires.

§. II. *Du toisé des solides.*

493. De même que l'on a divisé la toise quarrée en parties analogues à celle de la toise linéaire, on a aussi partagé la toise cube en différentes parties qui diminuent absolument suivant la même loi. On conçoit donc la toise cube ou le solide qui a une toise en tous sens, divisé d'abord en six solides égaux, qui ont une toise quarrée de base sur un pied de haut. Ce solide se nomme un *pied de toise cube;* on le désigne aussi par les lettres initiales de ses dimensions *ttp*, de même on a divisé le pied de toise cube en douze solides égaux d'une toise quarrée de base sur un pouce de haut, et on l'a nommé *pouce de toise cube,* que l'on désigne de même par *ttpo* ou *ttp;* chaque

pouce de toise cube est encore partagé en douze solides égaux toujours d'une toise quarrée de base sur une ligne de hauteur; on la nomme *ligne de toise-cube* ou *ttl;* il faut concevoir que la même loi subsiste toujours pour les subdivisions au-delà de lignes de toise-cube, en admettant des *primes*, *secondes, et tierces de toise-cube*, et les représentant pareillement par les lettres initiales de leurs dimensions respectives.

Connoissant la loi des subdivisions de la toise-cube, telle que nous venons de l'établir, il est facile d'exprimer un solide quelconque en *pieds, pouces* et *lignes cubiques;* car il est visible que le pied de toise-cube, tel que nous l'avons défini, vaut 36 pieds-cubes; pareillement un pouce de toise-cube étant la douzieme partie d'un pied de toise-cube, et celui-ci valant 36 pieds-cubes, comme on vient de le dire, chaque pouce de toise-cube vaudra 3 pieds-cubes. La ligne de toise-cube étant encore la douzieme partie du pouce de toise-cube, et ce dernier valant trois pieds-cubes, une ligne de toise-cube vaudra trois douziemes de pied-cube ou un quart de pied-cube, et à cause que celui-ci contient 1728 pouces-cubes, chaque ligne de toise-cube vaudra 432 pouces-cubes; ainsi on divisera les lignes de toise-cube par 4, on portera le quotient aux pieds-cubes, et pour chaque unité restante on comptera 432 pouces-cubes. Les secondes primes, et tierces de toise-cube se multiplieront encore par 36, 3, $\frac{1}{4}$ pour donner au produit des pouces-cubes; car chaque prime de toise-cube étant la douzieme partie d'une ligne du rang au-dessus, et celle-ci valant

432 pouces-cubes dont le douzieme est 36, il est évident qu'il faudra multiplier chaque ligne de toise-cube par 36, et par conséquent chaque seconde vaudra 3 pouces-cubes, et chaque tierce $\frac{1}{4}$ de pouce-cube ou 432 lignes-cubes, et ainsi de suite, ce qui donnera la table suivante des subdivisions de la toise-cube.

1 *toise cube* . .	vaut	6^{tp}	ou 216^{ppp}
1 *pied de toise-cube* .		12^{tto}	ou 36^{ppp}
1 *pouce*		12^{ttl}	ou 3^{ppp}
1 *ligne*		$12^{tl'}$	ou $\frac{1}{4}^{ppp}$ ou 432^{ooo}
1 *prime*		$12^{tl''}$	ou 36^{ooo}
1 *seconde*		$12^{tl'''}$	ou 3^{ooo}
1 *tierce de toise-cube* .		12^{tlIV}	ou $\frac{1}{4}^{ooo}$ ou 432^{lll}

Cela posé, le toisé-cubique n'aura plus aucune difficulté, et se traitera comme celui des surfaces.

EXEMPLE PREMIER.

494. *Soit proposé de trouver la solidité d'un massif de maçonnerie dont la longueur est de* $37^t\ 5^p\ 2^o\ 6^l$, *la largeur de* $3^t\ 3^p\ 6^o\ 9^l$ *et la hauteur de* $2^t\ 4^p\ 7^o\ 8^l$.

Ayant trouvé d'abord la surface de la base d'après les regles données pour les mesures superficielles, et l'ayant déterminée de $136^{tt}\ 1^{tp}\ 1^{to}\ 6^{tl}\ 6^{t'}\ 9^{t''}$; on multipliera ce produit par la hauteur, comme on le voit ci-dessous, en considérant que si cette surface avoit sur toute son étendue une toise de hauteur, le même nombre augmenté d'une dimension en toise exprimeroit le solide cherché; donc le rapport de la hauteur

à la toise nous donne le rapport abstrait par lequel il faut multiplier le produit déja trouvé pour avoir la solidité requise.

136^{tt} . 1^{tp} . 1to . 6^{tl} . $6^{t'}$. $9^{t''}$										
2^{t} . 4^{p} . 7° . 8^{l}										
272	2	.	3	.	1	.	1	.	6	
45	. 2	.	4	.	6	.	2	.	3	
45	. 2	.	4	.	6	.	2	.	3	
11	. 2	.	1	.	1	.	6	.	6	. 9
1	. 5	.	4	.	2	.	3	.	1	. 1 . 6
0	. 3	.	9	.	4	.	9	.	0	. 4 . 6
0	. 3	.	9	.	4	.	9	.	0	. 4 . 6
377^{ttt} . 4^{ttp} . 0^{tto} . 2^{ttl} . $9^{tt'}$. $8^{tt''}$. $7^{tt'''}$. $6^{tt''''}$										

Comme le nombre de toises du multiplicateur est exprimé par un seul chiffre, on commencera la multiplication par les dernieres unités du multiplicande, ce qui formera un premier produit. Pour 4 pieds, on prendra deux fois le tiers du multiplicande considéré comme exprimant des toises-cubes et parties de toises-cubes. Passant aux pouces du multiplicateur, on prendra pour 6 pouces le quart du produit de 2 pieds, pour un pouce le sixieme de ce dernier, et enfin pour huit lignes deux fois le tiers de ce que l'on a trouvé pour un pouce; et la somme de tous ces produits particuliers sera le cube demandé.

Si l'on veut avoir le même solide en pieds, pouces et lignes cubiques, ayant écrit au-dessous des nombres trouvés, la série des nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$, comme on le voit ici; on aura, après avoir fait les différents produits particuliers, et les

sommes de ces produits pour le solide cherché ; exprimé en mesures cubiques $377^{ttt}\ 144^{ppp}\ 1213^{ooo}\ 1620^{lll}$, comme il résulte évidemment de l'opération ci-jointe.

377^{ttt}	.	4^{ttp}	.	0^{tto}	.	2^{ttl}	.	$9^{tt'}$	.	$8^{tt''}$	.	$7^{tt'''}$	.	$9^{tt''''}$
		36	.	3	.	$\frac{1}{4}$	.	36	.	3	.	$\frac{1}{4}$	.	36
377^{ttt}	.	144^{ppp}	.	864^{ooo}	.	1296								
				324	.	324								
				24										
				1										
377^{ttt}	.	144^{ppp}	.	1213^{ooo}	.	1620^{lll}								

EXEMPLE II.

495. *Soit proposé de cuber un solide qui a* $57^{t}\ 4^{p}\ 8^{o}$ *de long sur* $4^{t}\ 5^{p}\ 9^{o}$ *de large, et* $3^{t}\ 3^{p}\ 10^{o}\ 9^{l}$ *de hauteur.*

Je cherche d'abord par les regles du toisé superficiel l'aire de la base du solide à mesurer ; et je la trouve de $286^{tt}\ 2^{tp}\ 10^{to}\ 8^{tl}$ à multiplier par la hauteur donnée, comme on le voit détaillé ci-dssous.

286^{tt}	:	2^{tp}	:	10to	.	8^{tl}								
3	.	3	.	10	.	9								
859	.	2	.	8	.	0								
143	.	1	.	5	.	4								
23	.	5	.	2	.	10	.	8						
11	.	5	.	7	.	5	.	4						
3	.	5	.	10	.	5	.	9	.	4				
1	.	5	.	11	.	2	.	10	.	8				
0	.	5	.	11	.	7	.	5	.	4				
1045^{ttt}	.	2^{ttp}	.	9^{tto}	.	0^{ttl}	.	$1^{tt'}$	.	$4^{tt''}$				
		36	.	3	.	$\frac{1}{4}$	.	36	.	3				

Si l'on veut réduire ce solide en toises, pieds, pouces et lignes cubiques, on le fera aisément en multipliant les subdivisions de la toise-cube à commencer aux toises-pieds par 36, 3, $\frac{1}{4}$ et répétant la même multiplication périodique; en prenant des pieds-cubes pour les trois premiers produits, et des pouces cubes pour les trois produits suivants, et enfin des lignes cubes pour les trois qui pourroient se trouver ensuite; observant de compter autant de fois 432 pouces cubes ou lignes cubes qu'il seroit resté d'unités aux nombres à multiplier par la fraction $\frac{1}{4}$: d'après cette opération, on trouvera que notre solide vaut $1045^{ttl}\ 99^{ppp}\ 48^{ooo}$.

Soit encore proposé de trouver la solidité d'un cube de maçonnerie qui auroit 47^{tt}, $5^{tp}\ 8^{to}\ 9^{tl}$ de base sur $9^{t}\ 5^{p}\ 11^{o}\ 8^{l}$ de haut.

Ayant disposé les deux facteurs de la multiplication comme on les voit ci-dessous et formé les différents produits particuliers, on trouvera pour leur somme ou produit total $470^{ttl}\ 1^{ttp}\ 11^{ttp}\ 8^{ttl}\ 2^{tt'}\ 2^{tt''}$, et en mesures cubiques $479^{ttt}\ 70^{ppp}\ 942^{ooo}$.

		47^{tt}	.	5^{tp}	.	8to	.	9^{tl}
		9	.	5	.	11	.	8
		431	.	3	.	6	.	9
Produit de	3^{p}	23	.	5	.	10	.	4 . 6
	2^{p}	15	.	5	.	10	.	11 . 0
	6°	3	.	5	.	11	.	8 . 9
	3°	1	.	5	.	11	.	10 . 4 . 6
	2°	1	.	1	.	11	.	10 . 11 . 0
	6^{l}	0	.	1	.	11	.	11 . 8 . 9
	2^{l}	0	.	0	.	7	.	11 . 10 . 11
		479^{ttt}	.	1^{ttp}	.	11^{ttp}	.	6^{ttl} . $2^{tt'}$. $2^{tt''}$
				36	.	3	.	$\frac{1}{4}$. 36 . 3

On pourra applique au toisé cubique la même regle que nous avons donnée pour le toisé des surfaces planes. Une application sur cet exemple suffira pour en montrer l'usage.

Soit donc repris le dernier exemple; ayant doublé les subdivisions de la toise quarrée et de la toise linéaire, on aura les deux nouveaux facteurs tels qu'ils sont écrits ci-dessous.

47^{tt}	.	11^{tp}	.	5to	.	6^{tl}				
9	.	11	.	11	.	4				
431	:	7	.	1	.	6				
43	.	11	.	6	.	0	.	6		
3	.	7	.	11	.	6	.	0	.	6
		1	.	3	.	11	.	9	.	10
479	.	3	.	11	.	0	.	4	.	4
479^{ttt}	.	1^{ttp}	.	11^{ttp}	.	6^{tll}	.	$2^{tt'}$	.	$2^{tt''}$

Et prenant la moitié des subdivisions de la toise, on aura exactement le même produit que celui trouvé ci-dessus.

Cette méthode est d'un usage très commode, lorsque le nombre des toises du multiplicateur est exprimé par un seul chifre, ce qui arrive le plus souvent; elle est encore plus expéditive, lorsqu'il n'y a aussi qu'un seul chiffre pour les toises du multiplicande; quant à la démonstration de cette pratique, elle sera facile à saisir d'après les réflexions suivantes.

1°. La loi des subdivisions ordinaires de la toise à l'égard de cette même longueur prise pour unité, peut évidemment être exprimée par

cette suite de fractions, dont la premiere désigne le rapport du pied à la toise $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6\times12}$, $\frac{1}{6\times12^2}$, $\frac{1}{6\times12^3}$, $\frac{1}{6\times12^4}$, etc.

2°. On peut donner à cette même loi une autre forme sans en changer la valeur, en multipliant les deux termes de chaque fraction par 2; et alors les pieds, pouces, lignes, primes, secondes, etc. de toise linéaire ou superficielle, seront exprimés par cette nouvelle suite de fractions $\frac{2}{12}$, $\frac{2}{12^2}$, $\frac{12}{12^3}$, $\frac{2}{12^4}$, $\frac{2}{12^5}$, etc. Cela posé; en reprenant l'exemple second du toisé des surfaces où il s'agissoit de trouver l'aire d'un rectangle qui avoit $9^t\ 5^p\ 4^o\ 8^l$ de long sur $5^t\ 3^p\ 8^o\ 9^l$ de large, il est visible que les deux facteurs de notre produit à déterminer peuvent s'écrire chacun respectivement sous les deux formes suivantes 9^t, $\frac{10}{12^1}$, $\frac{9}{12^2}$, $\frac{4}{12^3}$ et 5^t $\frac{7}{12^1}$, $\frac{5}{12^2}$, $\frac{6}{12^3}$, dans lesquelles les fractions au-dessous de la toise expriment les rapports des pieds, pouces et lignes du multiplicande et du multiplicateur avec leur unité principale. Or, il est évident que dans le produit du multiplicande par une fraction quelconque du multiplicateur, chaque fraction résultante de cette multiplication acquiert un 12 de plus pour facteur dans son dénominateur; donc il faut reculer tous ces produits particuliers d'un rang vers la droite. De plus, parceque 12 unités d'un rang quelconque font toujours une unité de l'ordre immédiatement supérieur, on voit qu'il faudra retenir autant d'unités qu'on aura de fois 12 jusques et compris le rang des demi-pieds qui

se trouve après les toises tant au multiplicande qu'au multiplicateur. Enfin, lorsque l'on aura fait la somme de tous les produits particuliers, les subdivisions de la toise quarrée ou cubique seront soumises à la forme de la loi que nous venons d'exposer; ainsi pour les ramener à l'expression ordinaire des subdivisions de la toise superficielle ou cubique, il n'y aura qu'à diviser par 2 tous les termes au-dessous des unités principales du produit assigné; et c'est ce que prescrit la derniere partie de la regle.

§. III. *Du toisé des bois.*

496. Comme les ouvrages de charpente à volume égal sont beaucoup plus chers que ceux de maçonnerie, les ingénieurs, architectes et entrepreneurs sont tous convenus de prendre pour unité de mesure une portion déterminée de la toise-cube, qu'ils ont fixé à trois pieds cubes ou à la 72eme partie de la même toise-cube. Cette unité s'appelle *solive*, et aussi, en terme de charpente, une *piece de bois*. Les bois de charpente se paient sur le pied de tant pour le cent de pieces de bois, ou le cent de solives; et ce prix doit varier suivant la qualité et les dimensions des morceaux de charpente; mais dans les devis, il faut toujours faire le prix du cent de solives d'après leurs qualités et dimensions, comme on vient de le dire.

Comme un solide qui auroit 72 pouces quarrés ou un demi-pied quarré de base sur une toise de long contiendroit trois pieds-cubes, on voit qu'une piece de bois qui auroit six pieds de long sur 8 à 9 d'équarrissage,

d'équarrisage, contiendroit trois pieds cubes ou une solive. On voit aussi que deux toises de long sur 36 pouces quarrés de base, ou sur 6 et 6 d'équarrisage, donneroient encore une solive. Il faut de plus observer que la forme ne fait rien à la dénomination, et qu'une piece de bois de forme pyramidale, ou même sphérique, seroit appellée *solive ou piece de bois*, pourvu que son volume fût de trois pieds cubes.

Pour ramener le toisé des bois aux mêmes regles que celui de la maçonnerie, on divise la solive telle que nous l'avons premièrement définie en six parties égales de 72 pouces quarrés de base, sur un pied de haut, et ce solide a été nommé *pied de solive*. Le pied de solive se divise, comme le pied de toise cube, en douze solides égaux, d'un demi-pied quarré de base, sur un pouce de haut, et se nomme *pouce de solive*. Le pouce se divise de la même maniere en 12 *lignes*, la ligne en 12 *primes*; et ainsi de suite, suivant la même loi des subdivisions de la toise cube.

Il y a un grand nombre de méthodes différentes pour trouver le cube des bois en solives, pieds, pouces et lignes de solive. Nous croyons pouvoir nous dispenser de les enseigner toutes ici, en nous arrêtant à celles qui nous ont paru les plus simples, comme les plus généralement adoptées; on en pourra trouver quelques autres dans les auteurs qui ont traité du toisé de la maçonnerie et de la charpente : avant de les développer ici, il est bon d'être prévenu que l'on entend par *dimensions de l'équarrisage*, les deux plus petites

qui se trouvent à l'extrémité des poutres ou solives, et qui sont ordinairement d'équerre l'une à l'autre.

Regle générale pour le toisé des bois.

497. *Pour trouver le nombre de solives, pieds, pouces et lignes de solive contenus dans une piece de bois, dont les dimensions sont données; mettez une des dimensions de l'équarrisage exprimée en pouces au rang des toises; et après avoir cherché, suivant les regles données ci-dessus pour le toisé des solides, le cube des trois dimensions, regardez le produit trouvé comme exprimant des solives, pieds, pouces et lignes de solive,* et l'opération est achevée.

Démonstration de la regle.

498. En mettant une des dimensions de l'équarrissage exprimée en pouces au rang des toises, on rend un des facteurs du produit à déterminer soixante-douze fois plus grand qu'il n'est; mais aussi, au lieu de compter des toises cubes, pieds, pouces et lignes de toise cube, on ne compte que des solives et subdivisions correspondantes de la solive, qui est la soixante-douzieme partie d'une piece de bois; donc le produit est tel qu'il auroit dû être sans ce changement fait à l'un de ses facteurs; donc il exprime réellement des solives, pieds, pouces et lignes de solive. C. Q. F. T. et D.

Il y a des toiseurs qui mettent une des dimen-

sions de l'équarrissage exprimée en pouces au rang des pieds, et qui comptent pour demi-pieds le nombre de pouces de l'autre dimension de l'équarrissage; et après avoir cherché le produit de ces deux facteurs, ils multiplient par la longueur de la piece; ce qui donne le nombre de solives, pieds, pouces et lignes de solive que l'on demande.

Cette regle rentre évidemment dans la premiere; puisque rendant un des facteurs douze fois et l'autre six fois plus grand, c'est comme si l'on rendoit le produit soixante-douze fois plus grand; donc, en comptant des solives et parties de solive au lieu de toises cubes et parties de toise cube, on remet le produit trouvé à sa juste valeur.

Enfin d'autres toiseurs, après avoir multiplié l'une par l'autre les dimensions de l'équarrissage exprimées en pouces, multiplient le produit par la longueur de la piece, et divisent ensuite par 72.

Cette pratique est encore évidente, car la solive peut être considérée comme un faisceau de 72 baguettes qui ont une toise de long sur un pouce quarré de base, dont la somme est égale à trois pieds cubes. Donc, puisque le produit trouvé exprime le nombre de baguettes de cette espece, contenues dans la piece, ainsi que leurs subdivisions respectives en pieds, pouces et lignes; en divisant par 72, on aura le nombre de solives, pieds, pouces et lignes de solive que l'on demande. Appliquons la premiere regle à quelques exemples, en laissant aux commençants de trouver les mêmes résultats par les deux autres regles.

EXEMPLE PREMIER.

499. *On demande le nombre de solives, pieds, pouces et lignes de solive, contenus dans une piece de bois qui a* $3^t\ 5^p\ 9^o\ 6^l$ *de long sur* 15 *et* 12 *pouces d'équarrissage.*

Ayant disposé la plus grande dimension de l'équarrissage sous la longueur de la piece et déterminé le produit comme on le voit ci-dessous de $0^{tt}\ 4^{tp}\ 11^{to}\ 5^{tl}\ 9^t$, on mettra les 12 pouces de l'équarrissage au rang des toises, et après avoir multiplié par ce nouveau facteur le produit déja trouvé, on aura pour le solide de la piece proposée $9^{sol}\ 5^{ps}\ 5^{os}\ 9^{ls}$.

3^t	5^p	9°	6^l	
0^t	1	3		
0	3	11	7	
0	0	11	10	9
0	4	11	5	9
12	0	0	0	0
9^{sol}	5^p	5os	9^{ls}	0

EXEMPLE II.

500. *On demande le nombre de solives d'un pieu de* $38^p\ 9^o\ 6^l$ *de long sur un diametre réduit de* $22^o\ 9^l$.

Je commence par chercher la circonférence d'un cercle dont le diametre est de $22^o\ 9^l$, je la trouve de $71^o\ 6^l$, suivant le rapport *d'Archimede*. La moitié de cette circonférence multi-

pliée par le rayon, donnera la surface du cercle qui doit servir de base au solide à mesurer, et par conséquent celle qu'il faut multiplier par la longueur du pieu pour avoir sa solidité. Cette demi-circonférence est de $35^{o}\ 9^{l}$ qui, réduits en toises, ou comptés pour autant de toises, donnent $35^{t}\ 4^{p}\ 6^{o}$; je commence donc par chercher le produit de ce nouveau facteur par le rayon, comme on le voit ci-dessous.

$35^{t} . 4^{p} . . 6^{o}$

$0^{t} . 0 . 11^{o} . 4^{l} . 6^{l}$

Faux produit d'un pied $5^{t} . 5^{p'} . 9^{o}$

Pour

6°	. . 2	. 5	. 10	. 6		
3°	. . 1	. 2	. 11	. 3		
2°	. . 0	. 5	. 11	. 6		
4^{l}	. . 0	. 0	. 11	. 11		
$4'$	. . 0	. 0	. 0	. 11	. 11 .	
$2'$	. . 0	. 0	. 0	. 5	. 11	. 6

$5^{tt} . 3^{tp} . 10^{to} . 7^{tl} . 10^{t'} . 6^{t''}$

Multipliant ce produit par la longueur de la piece, comme on le voit ci-dessous, on aura pour la valeur de la piece de bois à mesurer, la valeur telle qu'elle s'y trouve déterminée.

$5^{tt} . 3^{tp} . 10^{to} . 7^{tl} . 10^{t'} . 6^{t''}$

$6^{t} . 2^{p} . 9^{o} . 6^{l}$

Pour

6^{t}	33 .	5	. 3	. 11	. 3	. 0	
2^{p}	1 .	5	. 3	. 6	. 7	. 6	
6°	0 .	2	. 9	. 10	. 7	. 10	. 6
3°	0 .	1	. 4	. 11	. 3	. 11	. 3
6^{l}	0 .	0	. 2	. 10	. 10	. 7	. 10 . 6

$36^{sol} . 3^{ps} . 1^{os} . 2^{ls} . 8^{'s} . 11^{''s} . 7^{'''} . 6^{iva}$

On trouveroit absolument le même résultat par les autres méthodes.

LIVRE QUATRIEME.

Des Éléments de Géométrie.

DANS lequel on expose les principes de la trigonométrie rectiligne et sphérique; son usage dans la levée des plans par les triangles, et les différentes méthodes relatives aux divers instruments qu'on y emploie.

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires et définitions des lignes par le moyen desquelles on calcule toute espece de triangle.

DÉFINITIONS.

501. TOUT triangle rectiligne étant essentiellement composé de trois angles et de trois côtés, l'*art d'évaluer toutes les parties inconnues d'un triangle quelconque par la connoissance des trois autres se nomme trigonométrie.* Il faut pourtant excepter le cas où les trois parties connues sont les trois angles; parcequ'il y a une infinité de triangles qui peuvent avoir leurs angles égaux,

chacun à chacun ; et qu'ainsi la valeur des angles ne donne point celle des côtés, mais simplement leurs rapports, comme cela suit d'ailleurs de ce que tous les triangles équi-angles sont semblables.

502. Outre les triangles composés par des lignes droites, on considere aussi des triangles formés par des arcs de grands cercles qui appartiennent à une même sphere sur la surface de laquelle ils sont décrits. Ces sortes de triangles sont nommés *sphériques ;* l'art d'en déterminer les différentes parties, lorsque trois sont connues, constitue une autre branche de la trigonométrie que l'on a nommée *trigonométrie sphérique*, dont nous donnerons ici un traité assez complet, quoique très abrégé. Avant de passer aux autres définitions, donnons une idée de la maniere dont on a pu établir la théorie de de toute espece de trigonométrie, et réduire la résolution de tous les cas possibles à des tables dans lesquelles tous les triangles possibles sont en quelque sorte résolus d'avance, et la détermination de leurs parties inconnues réduite à de simples regles de trois.

503. Avec trois lignes données, on ne peut former qu'un seul triangle qui se trouve donné d'espece. Il y a donc un rapport nécessaire entre les côtés d'un triangle et les angles qui leur sont opposés, quoique les uns ne croissent pas dans la même raison que les autres ; de plus il n'y a pas de triangle que l'on ne puisse concevoir inscrit dans un cercle dont le rayon dépend de la valeur absolue des trois côtés de ce même triangle ; et si l'on imagine un autre cercle dont

le rayon soit fixe et invariable, on pourra toujours assigner dans ce même cercle un triangle semblable à tel triangle donné que l'on voudra ; donc la variété infinie des triangles quant à leurs especes, dépend des combinaisons trois à trois de toutes les cordes possibles d'un seul et même cercle, dont le rayon est pris pour unité; sauf à diviser ce même rayon en 1000, ou 10000, ou 100000 parties égales, pour calculer toutes les cordes avec plus de précision. Enfin parceque les moitiés sont entre elles comme les tous, on voit encore que le travail du calcul des tables de toutes les cordes peut se réduire à celui de toutes les demi-cordes depuis 0, etc. degrés jusqu'à 90°.

504. En effet soit un triangle quelconque BAD (*fig.* 160, *planche XI*) inscrit dans un cercle, et soient tirés les rayons CA, CB, CD, ainsi que les droites CF, CG CI, perpendiculaires à chacun des trois côtés du même triangle; il est évident que l'angle BCF ayant son sommet au centre, a pour mesure l'arc BF moitié de l'arc soutenu par la corde, ou le côté BD; donc ce même angle est égal à l'angle BAD qui a son sommet à la circonférence, et qui a aussi pour mesure le même arc BF. On voit de même que les angles ACG, ACI sont respectivement égaux aux angles ABD et ADB par les mêmes raisons. On voit donc que les valeurs des demi-cordes BL, AK et AH sont déterminées par les valeurs absolues des angles qui leur sont opposés, ainsi que les valeurs des cordes entieres ou côtés BD, AD, AB opposés à ces côtés; si donc on a le

rapport de deux côtés AB, AD par le moyen des angles D et B et qui leur sont opposés, avec l'expression de l'un de ces côtés comme AB en mesures connues et déterminées, rien ne sera plus facile que d'avoir la valeur de l'autre côté AD en mêmes mesures; puisque ces côtés gardent toujours entre eux le rapport donné par les angles qui leur sont opposés, soit qu'on les considere comme côtés du triangle auquel ils appartiennent, soit qu'on les regarde comme cordes du cercle auquel le même triangle est supposé inscrit.

505. Supposons, par exemple, que l'angle en D étant de 52° 24′ on ait trouvé par une table des demi-cordes que la ligne AH soit de 79228 parties dont le rayon AC en contient 100000; et que l'angle B étant pareillement connu de 49° 36′, on ait trouvé par la même table la valeur de la demi-corde AK de 76153 parties du même rayon; il est évident que si l'on connoît de plus la valeur de la ligne ou côté AB en mesures déterminées, comme de 4782 toises; on n'aura qu'à faire cette proportion pour déterminer aussi en toises la valeur du côté AD; AH : AK ou 792281 : 76153 :: AB ou 4782 : AD que l'on trouvera de 4596^{t} 2^{p} à très peu près. On voit encore qu'à cause que les trois angles d'un triangle valent deux droits, les angles B et D étant connus, l'angle en A l'est aussi nécessairement, et par conséquent, dans la table des demi-cordes inscrites au cercle, on trouvera le rapport de la ligne DL moitié de BD avec le rayon CD; donc par une proportion semblable à celle que nous venons de voir, on

aura la valeur du côté BD en toises, pieds, pouces comme on a trouvé celle du côté AD.

506. Réciproquement si l'on connoît en mesures données les côtés AB et AD au triangle BAD, avec l'un des angles opposés à l'un de ces côtés, comme l'angle D, par exemple, de 52° 24′, on pourra trouver les autres angles au moyen de la même table des demi-cordes, ainsi que le troisième côté BD du même triangle; supposant donc que les côtés AB et AD sont réciproquement de 4782^t et de $4596^t\ 2^p\ 4^o$; à cause qu'il y a même rapport entre ces côtés exprimés en toises et leurs moitiés considérées comme les demi-cordes des arcs doubles de la mesure des angles opposés, on aura la proportion 4782^t : $4596^t\ 2^p\ 4^o$ :: AH ou 79288 : AK, que l'on trouvera de 76153 parties du rayon, divisé comme nous le supposons en 100000 parties égales. Cherchant donc ce quatrième terme dans la table des demi-cordes, on trouvera qu'il répond à un arc de $49^{o\,11'}\,36'$ mesure de l'angle ABD. L'angle B une fois connu, on auroit l'angle en A, en retranchant la somme des angles B et D de 180°, et par une nouvelle proportion semblable aux précédentes, on trouveroit en toises et subdivisions de la toise la valeur du côté BD. Il en seroit de même pour tout autre triangle dans lequel on connoîtroit deux angles et l'un des côtés opposés, ou deux côtés et l'un des angles opposés.

507. On voit donc qu'avant d'aller plus loin nous devons nous occuper des lignes dont on fait usage pour la résolution des triangles; des

principes nécessaires pour la construction des tables qui les expriment; après quoi nous passerons à la démonstration des analogies convenables aux différents cas de la trigonométrie, soit pour les triangles rectangles soit pour les triangles obliquangles: enfin nous ferons l'application de ces regles à différents exemples et à différentes questions qui se présentent le plus fréquemment dans les opérations trigonométriques. Quant à la théorie de la construction des tables que nous allons donner, nous n'entrerons point dans un trop grand détail de toutes les adresses des géometres qui les ont construites; parcequ'il n'est plus question de reprendre ce travail; mais seulement d'en connoître assez la nature pour s'en servir avec connoissance de cause, et pour éviter les erreurs dans lesquelles on pourroit tomber, faute de connoître les rapports que ces lignes ont entre elles ainsi qu'avec les angles qu'elles déterminent.

CHAPITRE II.

Des différentes lignes dont on fait usage dans la trigonométrie, et des propositions les plus générales qui ont servi à la construction des tables de ces mêmes lignes; applications de ces mêmes tables à la division des arcs de cercle en tant de parties égales que l'on voudra et à la description des polygones réguliers.

DÉFINITIONS.

508. Iere SOIT une circonférence de cercle AB *ab* (*fig.* 161 *pl.* 11) et deux diametres A*a*, B*b* perpendiculaires l'un à l'autre; soit pris sur cette même circonférence différents arcs AM, AB*m*, AB*am'*; si des extrémités de ces arcs qui ont tous une même origine commune en A, on abaisse sur le rayon CA qui passe cette même origine des perpendiculaires MP, *mp*, *m*P; ces lignes seront nommées *sinus* des arcs auxquels elles appartiennent.

II. Si un arc BM est complément d'un arc AM; et si l'on abaisse du point M une perpendiculaire MQ au rayon CB qui passe par l'extrémité B de l'arc MB, cette ligne sera appellée *co-sinus* de l'arc AM, en même temps qu'elle est le sinus de l'arc MB auquel elle appartient.

III. Si par le même point A, origine commune

à tous ces différents arcs, on mene une tangente AD terminée au rayon CM qui passe par l'autre extrémité de l'arc AM; cette ligne sera nommée *la tangente* de l'arc AM auquel elle répond; et si par le point B extrémité de l'arc BM complément de AM, on éleve une autre perpendiculaire BF au rayon CB terminée au rayon CM prolongé indéfiniment jusqu'à ce qu'elle le coupe en F, cette ligne sera nommée *co-tangente* de l'arc AM et tangente de l'arc BM complément du premier.

IV. La partie du rayon CM comprise entre le centre et le point D où ce rayon est coupé par la tangente AD ou la co-tangente BF se nomme *sécante* de l'arc AM et *co-sécante* du même arc; ainsi CD est la sécante de l'arc AM et CF en est la co-sécante.

V. La portion du rayon comprise entre l'origine d'un arc et l'extrémité du sinus de cet arc se nomme le *sinus* verse du même arc; ainsi AP est le sinus verse de l'arc AM et BQ en est le *co-sinus* verse; en tant qu'il est le sinus verse de l'arc BM complément de AM; *a*P est aussi le sinus verse de l'arc *a*M. Ces lignes sont les principales dont on fait usage dans la trigonométrie, et celles dont on a dressé des tables pour tous les arcs depuis 0° 0′ jusqu'à 90°.

COROLLAIRE I.

509. Il suit des définitions des sinus que le sinus d'un arc quelconque est la moitié de la corde qui soutient un arc double. C'est ainsi que MP sinus de l'arc AM est moitié de la corde M*m* qui soutient l'arc MA*m* double de l'arc

AM; il faut entendre la même chose des co-sinus.

COROLLAIRE II.

510. Il suit encore des mêmes définitions que les arcs suppléments l'un de l'autre ont le même sinus et le même co-sinus; car de l'extrémité M commune aux deux arcs AM, *a*BM, l'on ne peut abaisser sur le diametre A*a* que la seule perpendiculaire MP à laquelle répond la seule ligne CP qui est le co-sinus de l'arc AM comme de l'arc *a* BM; d'où l'on voit que si un angle donné est obtus, on ne trouvera son sinus et son co-sinus dans les tables qu'en cherchant le sinus et le co-sinus de son supplément. Il en sera de même pour les tangentes et les co-tangentes de deux arcs suppléments l'un de l'autre; ils auront les mêmes lignes pour tangentes, excepté que celle qui appartient à l'angle moindre que 90° étant positive ou au-dessus du diametre, celle qui appartient à l'angle plus grand que 90° sera négative ou au-dessous du même diametre; pareillement la co-tangente du premier étant positive ou d'un côté du rayon CB, la co-tangente du second sera de l'autre côté du même rayon.

Pour concevoir les différents changements qui arrivent à toutes les lignes dont nous venons de parler tant pour leurs valeurs absolues que pour leurs positions, il n'y a qu'à imaginer un rayon mobile CM originairement confondu avec le rayon fixe et invariable CA qui fait une révolution entiere autour du centre C d'un cercle quelconque dont le rayon est pris pour unité, et suivre avec attention ce que deviennent les sinus,

co-sinus, tangentes et co-tangentes des différents arcs parcourus par le point M dans sa révolution entiere. Ces considérations fourniront la table suivante, dans laquelle nous n'avons rien dit des sécantes ni des co-sécantes des mêmes arcs, parcequ'il sera facile de connoître leurs différentes valeurs et positions, et que de plus on fait peu d'usage de ces lignes dans la trigonométrie; par ce, tout angle se trouve également déterminé par le rapport de la sécante au rayon ou par celui du rayon au co-sinus; et encore par celui du rayon au sinus qui fait le même effet que celui de la sécante à la tangente. Le signe ∞ signifie l'infini.

Valeur des arcs.	*Sinus.*	*Co-sinus.*	*Tang.*	*Co-tang.*
à 0° à 180° et à 360°	0	$+1$	0	$+\infty$
30° et à 150°	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\pm\sqrt{3}$
45° et à 135°	$+\sqrt{\frac{1}{2}}$	$+\sqrt{\frac{1}{2}}$	$+1$	± 1
60° et à 120°	$+\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$+\frac{1}{2}$	$+\sqrt{3}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
90° et à 290°	± 1	0	$\pm\infty$	0
210° et à 330°	$-\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\pm\sqrt{3}$
225° et à 315°	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	± 1	± 1
240° et 300°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$=\frac{1}{2}$	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

CHAPITRE III.

De la construction des tables.

PROBLÊME. I.

511. *CONNOISSANT le sinus d'un arc quelconque* AM; *trouver* 1° *son co-sinus;* 2° *sa tangente;* 3° *sa co-tangente;* 4° *sa sécante et sa co-sécante* (*fig.* 161).

SOLUTION.

Soit l'arc AM dont le sinus MP est supposé connu, c'est-à-dire exprimé en parties du rayon pris pour unité et divisé en 10000000 parties égales; il est visible que son co-sinus MQ est égal à CP; or à cause du triangle rectangle CPM, on a $\overline{CP}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{PM}^2$; donc CP ou MQ $= \sqrt{(\overline{CM}^2 - \overline{PM}^2)}$; ainsi pour avoir le co-sinus d'un arc dont le sinus est connu, *du quarré du rayon ôtez le quarré de ce même sinus, et du reste prenez la racine quarrée, qui sera le co-sinus cherché, ou ce qui revient au même le sinus de son complément.*

2° ayant calculé le co-sinus comme on vient de le dire; à cause des triangles semblables CPM et CAD, on aura CP : PM :: CA : AD; donc en désignant le sinus d'un arc AM quelconque que nous nommerons A par *sin.* A son co-

co-sinus par *cos.* A ; sa tangente par *tang.* A ; sa co-tangente par *cot.* A, on aura *tang.* A $= \frac{R \times sin.\ A}{cos.\ A.}$: enfin à cause des triangles semblables CBF et CQM, on aura pareillement CQ : QM : : CB : BF, ou *sin.* A : *cos.* A : : R : *cot.* A ; d'où il suit que *cot.* A $= \frac{R \times cos.\ A}{sin.\ A}$; ce qui fait voir que *la tangente d'un arc quelconque, est égale au produit du rayon par le sinus du même arc divisé par le co-sinus ; et que sa co-tangente est égale au produit du même rayon par le co-sinus divisé par le sinus* C. Q. F. T. et D.

COROLLAIRE I.

512. Il suit de là que les co-tangentes des différents arcs sont en raison inverse des tangentes des mêmes arcs ; car il est visible que la fraction $\frac{R \times cos.\ A}{sin.\ A}$, qui exprime la co-tangente, est l'inverse de la fraction $\frac{R \times sin.\ A}{cos.\ A}$, qui est la valeur de la tangente. On trouveroit avec la même facilité la sécante et la co-sécante de l'arc AM ; car à cause des triangles semblables CPM et CAD, on aura CP : CA : : CM : CD, ou *cos.* A : R : : R : *séc.* A $= \frac{RR}{cos.\ A}$; et CQ : CB : : CM : CF, ou *sin.* A : R : : R *co-séc.* A $= \frac{RR}{sin.\ A}$.

COROLLAIRE II.

513. On voit de plus, que la valeur d'un angle se détermine également par le rapport du co-sinus au sinus de cet angle, comme par celui du rayon à la tangente, ou par celui de la co-tangente au rayon ; puisque ces trois rapports sont

égaux. On voit aussi pourquoi on fait peu d'usage des sécantes et des co-sécantes dans la trigonométrie, parceque les angles ou les arcs qui en sont la mesure, sont également déterminés par le rapport du rayon au co-sinus, ou de la sécante au rayon; ou enfin par ceux du rayon au sinus, et de la co-sécante au rayon, puisque ces rapports sont égaux deux à deux, comme on l'a démontré au problême dernier.

PROBLÊME II.

514. *Connoissant le sinus et le co-sinus d'un arc, trouver le sinus et le co-sinus de sa moitié*, (*fig.* 162).

SOLUTION.

Soit AM l'arc donné, dont le sinus MP et le co-sinus CP sont aussi donnés : ayant tiré la corde AM; si on lui mene la perpendiculaire CQM, il est visible que AQ et MQ seront le sinus, et CQ le co-sinus de la moitié de cet arc. Soit encore menée la corde BM qui sera double de CQ, puisque AB est double de AC, et que les triangles ACQ, ABM sont aussi semblables. Or à cause des triangles rectangles AMB, APM aussi semblables, on aura AP : AM : : AM : AB; donc $\overline{AM}^2 = AP \times AB$; donc $AM = \sqrt{AB \times AP}$, et MQ ou *sin.* $\frac{1}{2}$ A $= \frac{1}{2}\sqrt{AB \times AP} = \sqrt{\frac{1}{2}AC \times AP}$. De même et à cause des triangles rectangles semblables AMB et MPB, on aura AB : BM : : BM : BP; donc $\overline{BM}^2 = AB \times BP$, et $BM = \sqrt{AB \times BP}$;

donc C Q ou $cos.\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\sqrt{AB \times BP} = \sqrt{\frac{1}{2}AC \times BP}$; donc *le sinus de la moitié d'un arc quelconque est moyen proportionel entre la moitié du rayon et la différence du rayon au co-sinus de cet arc :* et de même *le co-sinus de la moitié du même arc, est aussi moyen proportionel entre le demi rayon et la somme du même rayon et du co-sinus de cet arc.*

PROBLÊME III.

515. *Connoissant le sinus et le co-sinus d'un arc, trouver le sinus et le co-sinus de l'arc double, (fig. 162).*

SOLUTION.

Soit AN l'arc simple, que nous désignons toujours par A, dont AQ est le sinus et CQ le co-sinus : il est visible que toutes choses restantes comme au problême précédent, MP et CP seront le sinus et le co-sinus de l'arc double. Cela posé, les triangles rectangles ACQ, APM, ayant un angle commun en A, sont semblables, et donnent CA : CQ : : AM : MP ou R : *cos.* A : : 2 *sin.* A : *sin.* 2 A ; donc, pour trouver le sinus d'un arc double, il faut faire cette proportion, *le rayon est au co-sinus, comme le double du sinus est au sinus de l'arc double.* C. Q. F. 1°. T. et D.

Les mêmes triangles donnent encore CA : AQ : : AM : AP ; ou R : *sin.* A : : 2 *sin.* A : R — *cos.* 2 A ; d'où l'on tire $cos.\ 2\,A = \frac{RR - 2\ sin.^2 A}{R}$. Les triangles rectangles ACQ et BPM aussi semblables, donnent encore AC : CQ : : BM : BP, ou

R : *cos.* A : : 2 *cos.* A : R + *cos.* 2 A ; d'où l'on tire *cos.* 2A $= \frac{2\,cos.^2 A - RR}{R}$; d'où il suit que *l'on aura le co-sinus d'un arc double, en retranchant du quarré du rayon le double du quarré du sinus de l'arc simple, et divisant le reste par le rayon ; ou en ôtant le quarré du rayon de deux fois le quarré du co-sinus de l'arc simple, et divisant par le même rayon,* C. Q F. 2°. T. et D.

PROBLÊME IV.

516. *Connoissant le sinus et le co-sinus de deux arcs inégaux quelconques, trouver les sinus et co-sinus de leur somme et de leur différence,* (*fig.* 163).

SOLUTION.

Soient AM et DM ou FM les arcs dont les sinus et co-sinus sont donnés, et dont il faut trouver les sinus et co-sinus de leur somme ou de leur différence. Ayant tiré la corde FD perpendiculaire au rayon CM, et abaissé des points D, F, M et G, les perpendiculaires DQ, FP, MN et GI au rayon CA, il est visible que DQ sera le sinus de la somme, et FP le sinus de la différence des arcs donnés ; que CQ et CP seront le co-sinus de la somme et de la différence des mêmes arcs. Soient encore menés par les points F et G les lignes FL et GK paralleles au rayon CA. Désignons le plus grand arc AM par A, et le plus petit DM ou MF par B. Il est visible que DQ, sinus de la somme de ces arcs, est égal à QK ou GI + DK, et que FP, sinus de la différence des mêmes arcs, est égal à QK ou GI — KL = GI — DK ; de même CQ, co-

sinus de la somme des arcs donnés, est égal à CI — IQ = CI — GK, et que CP, co-sinus de la différence des mêmes arcs, est égal à CI + IP = CI + GK : il ne s'agit donc plus que de trouver les valeurs des lignes GI, CI, DK et GK en fonctions des sinus et co-sinus des arcs donnés; ce qui n'aura aucune difficulté.

En effet les triangles CMN et CGI donnent CM : CG : : MN : GI, ou R : *cos.* B : : *sin.* A : GI = $\frac{\textit{sin.}\ A \times \textit{cos.}\ B}{R}$; et CM : CN : : CG : CI ou bien R : *cos.* A : : *cos.* B : CI = $\frac{\textit{cos.}\ A \times \textit{cos.}\ B}{R}$. Les triangles CMN et DGK sont aussi semblables, puisqu'ils ont les côtés perpendiculaires les uns sur les autres ; ces triangles donnent CM : CN : : DG : DK ou R : cos. A : : sin. B : DK = $\frac{\textit{sin.}\ B \times \textit{cos.}\ A}{R}$; et CM : MN : : DG : GK ou R : *sin.* A : : *sin.* B : GK = $\frac{\textit{sin.}\ A \times \textit{sin.}\ B}{R}$; donc, en ajoutant DK à GI ou l'ôtant de cette même ligne, on aura *sin.* (A ± B) = $\frac{\textit{sin.}\ A \times \textit{cos.}\ B \pm \textit{sin.}\ B \times \textit{cos.}\ A}{R}$; et pareillement ôtant GK de CI ou l'ajoutant à cette ligne, on aura cos. (A ± B) = $\frac{\textit{cos.}\ A \times \textit{cos.}\ B \mp \textit{sin.}\ A \times \textit{sin.}\ B}{R}$; d'où l'on voit que nous avons la valeur des sinus et co-sinus de la somme et de la différence des arcs donnés, sans y employer d'autres expressions que celles des sinus et co-sinus des mêmes arcs, C. Q. F. T. et D.

COROLLAIRE I.

517. Puisque nous avons démontré que *tang.* A = $\frac{R \times \textit{sin.}\ A}{\textit{cos.}\ A}$, il s'ensuit que l'on calculeroit

aisément les tangentes et co-tangentes de la somme et de la différence des mêmes arcs ; car on aura d'abord *tang.* (A ± B) = $\frac{sin.\ A \times cos.\ B \pm sin.\ B \times cos.\ A}{cos.\ A \times cos.\ B \mp sin.\ A \times sin.\ B}$. Divisant chaque terme par *cos.* A × *cos.* B, et substituant les tangentes de A et de B, au lieu des expressions $\frac{sin.\ A}{cos.\ A}$ et $\frac{sin.\ B}{cos.\ B}$, on aura *tang.* (A±B) = $\frac{(tang.\ A \pm tang.\ B) \times RR}{RR \mp tang.\ A \times tang.\ B}$.

COROLLAIRE II.

518. Si l'on divise les deux termes de la valeur de *sin.* (A±B) par *cos.* A × *cos.* B, et si l'on met les valeurs qui en résultent en proportion, on aura *sin.* (A+B) : *sin.* (A—B) : : *tang.* A + *tang.* B : *tang.* A — *tang.* B. De même si l'on divise les mêmes expressions par *sin.* A × *sin.* B, et si l'on met les valeurs en proportion, on aura encore *sin.* (A+B) : *sin.* (A—B) : : *cot.* B+ *cot.* A : *cot.* B — *cot.* A ; on trouveroit par une opération semblable, sur l'expression *cos.* (A±B) = *cos.* A × *cos.* ∓ *sin.* A × *sin.* B, que *cos.* (A+B) : *cos.* (A—B) : : *cot.* A — *tang.* B : *cot.* A + *tang.* B : : *cot.* B — , *cot.* A : *cot.* B + *cot.* A.

COROLLAIRE III.

519. Puisque l'on a DQ+FP = 2 GI, et que nous avons trouvé au dernier théorême GI = $\frac{sin.\ A \times cos.\ B}{R}$, on en conclura sur le champ que DQ = $\frac{2\ cos.\ B \times sin.\ A}{R}$ — FP, et que FP =

$\frac{2\,cos.\,B \times sin.\,A}{R}$ — DQ : de même, puisque DQ — FP = 2 DK ou 2 KL, et que nous avons pareillement trouvé DK ou KL = $\frac{sin.\,B \times cos.\,A}{R}$; on en conclura encore que DQ = $\frac{2\,sin.\,B \times cos.\,A}{R}$ + FP, et que FP = DQ — $\frac{2\,sin.\,B \times cos.\,A}{R}$: enfin à cause que les lignes CQ, CI, CP se surpassent de la même quantité IQ ou GK, on aura CQ + CP = 2 CI = $\frac{2\,cos.\,A \times cos.\,B}{R}$; en mettant pour CI sa valeur trouvée au dernier théorême ; donc CQ = $\frac{2\,cos.\,A \times cos.\,B}{R}$ — CP et CP = $\frac{2\,cos.\,A \times cos.\,B}{R}$ — CQ. On a aussi CP — CQ = 2 IQ = 2 GK = $\frac{2\,sin.\,A \times sin.\,B}{R}$; donc CP = $\frac{2\,sin.\,A \times sin.\,B}{R}$ + CQ ; et CQ = CP — $\frac{2\,sin.\,A \times sin.\,B}{R}$. Ces expressions fournissent quatre théorêmes, qui ont servi singulièrement à faciliter le travail du calcul des tables des sinus et co-sinus. Pour en connoître la vérité, il suffira de comparer l'énoncé de chacun avec l'expression dont il a été déduit.

THÉORÊME I.

520. Supposant toutes choses comme au dernier problême ; soient trois arcs de cercle AF, AM, AD en progression arithmétique (fig. 163). Si l'on connoît le sinus et le co-sinus d'un des arcs extrêmes, et de l'arc moyen, ainsi que le sinus et le co-sinus de la différence commune ; pour

avoir le sinus de l'autre extrême ; *on multipliera le double du co-sinus de la différence commune par le sinus de l'arc moyen ; et si du produit divisé par le rayon, on ôte le sinus de l'un des arcs extrêmes, le reste sera le sinus de l'autre extrême.* Ce théorême suit évidemment de ce que $DQ = \frac{2\,cos.\,B \times sin.\,A}{R} - FP$, et que $FP = \frac{2\,cos.\,B \times sin.\,A}{R} - DQ$.

THÉORÊME II.

521. Supposant toujours les mêmes constructions et les mêmes données. *Si on multiplie le co-sinus de l'arc moyen, par le double du sinus de la différence commune, on aura le sinus du plus grand, en ajoutant ce produit divisé par le rayon au sinus du plus petit ; et si on retranche le même produit toujours divisé par le rayon du sinus du plus grand arc, on aura le sinus du plus petit.* Ce qui suit nécessairement, de ce que $DQ = \frac{2\,sin.B \times cos.\,A}{R} + FP$, et de ce que $FP = DQ - \frac{2\,sin.B \times cos.\,A}{R}$.

THÉORÊME III.

522. Supposant toujours les mêmes conditions qu'aux théorêmes précédents ; *si on multiplie le double du co-sinus de l'arc moyen par le co-sinus de la différence commune de trois arcs AF, AM, AD supposés en progression arithmétique ; on aura le co-sinus de l'un des arcs extrêmes, en retranchant de ce produit divisé par le rayon le co-sinus de l'autre extrême.* Cette vérité n'est

autre chose que l'expression de la formule CP $= \frac{2\cos.A \times \cos.B}{R} - CQ$, et de celle-ci $CQ = \frac{2\cos.A \times \cos.B}{R} - CP$.

THÉORÊME IV.

523. Toutes choses restantes encore comme ci-devant; *si on multiplie le double du sinus d'un arc moyen par le sinus de la différence commune de trois arcs toujours en progression arithmétique, et si l'on ajoute le produit divisé par le rayon au co-sinus du plus grand des trois arcs, on aura le co-sinus du plus petit; et si l'on retranche ce même produit toujours divisé par le rayon du co-sinus du plus petit arc, on aura le co-sinus du plus grand.* Ce dernier théorême n'est autre chose que la traduction littérale des expressions $CP = \frac{2\,sin.A \times sin.B}{R} + CQ$, et $CQ = CP - \frac{2\,sin.A \times sin.B}{R}$.

PREMIER SCHOLIE.

524. Il est facile de voir l'usage qu'on a pu faire des propositions précédentes dans la construction des tables des sinus. En effet, par le second problême, on peut trouver les sinus et co-sinus de tous les arcs qui décroissent suivant une progression double; par exemple, sachant que le sinus de 30° est égal à la moitié du rayon, et que son co-sinus a pour expression $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, on peut trouver les sinus et co-sinus des arcs continuellement sous-doubles de 30°. Le douzieme terme de cette suite, donnera le sinus d'un arc de 0° 0'

$52''\ 44'''\ 3''''\ 45'''''$. Le calcul pour y arriver n'a pas d'autre difficulté que la longueur des opérations : on en trouve le détail dans la trigonométrie de M. *Camus*, qui a poussé jusqu'à l'arc de $1''\ 38'''\ 52''''$. Nous ne croyons pas devoir donner ici toutes ces opérations, parceque nous ne traitons de la construction des tables qu'autant qu'il est nécessaire pour en connoître la nature et l'usage ; et qu'il seroit inutile dans le fond de recommencer des calculs qui ont été faits avec la plus grande précision, et suffisamment vérifiés par ceux qui se sont consacrés à ces travaux aussi utiles qu'ils ont été pénibles et rebutants.

SECOND SCHOLIE.

525. Le problême troisieme sert à remonter des sinus et co-sinus connus d'un arc quelconque, à ceux des arcs qui croissent par rapport à celui-ci dans une progression double. Le quatrieme problême et les théorêmes que nous en avons déduits ont singulièrement contribué à faciliter la construction des tables des sinus. Supposons en effet, que l'on soit arrivé, par quelque méthode que ce soit, à déterminer avec la plus grande précision le sinus et le co-sinus de l'arc d'une minute, que nous désignerons par $sin.\ 1'$ et $cos.\ 1'$; le dernier problême fera connoître le sinus et le co-sinus d'un arc de $2'$; ensuite (par le n°. 520), on trouvera que $sin.\ 3' = 2\,cos.\ 1' \times sin.\ 2' - sin.\ 1'$, ou encore (par le n°. 521) $sin.\ 3' = 2.\ sin.\ 1' \times cos.\ 2' + sin.\ 1'$. On trouvera de la même maniere le sinus de 4, 5, 6, 7, etc. minutes, puis-

que ces arcs sont tous en progression arithmétique, en faisant usage des deux premiers théorêmes.

TROISIEME SCHOLIE.

526. Si l'on suppose le rayon égal à l'unité, et l'arc moyen de 45°; ses sinus et co-sinus auront chacun pour expression $\sqrt{\frac{1}{2}}$; donc, par le second théorême, si on multiplie le sinus de la différence d'un arc plus grand que 45° à 45 degrés par $2\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou, ce qui revient au même, par $\sqrt{2}$, on aura la différence du sinus de ce même arc à celui d'un autre arc autant au-dessus de 45°, que le plus grand arc est au-dessus de ce même arc moyen. Si, par exemple, la différence commune des trois arcs en progression arithmétique est de 10°, on aura *sin.* $10° \times \sqrt{2} =$ *sin.* 55° — *sin.* 35°; et par conséquent, *sin.* 55° = *sin.* $10° \times \sqrt{2}$ + *sin.* 35°. Si la différence commune est 15° on aura *sin.* $15° \times \sqrt{2} =$ *sin.* 60° — *sin.* 30°; ou *sin.* 60° = *sin.* $15° \times \sqrt{2}$ + *sin.* 30°.

Si l'arc moyen est de 60°, son sinus est $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, et son co-sinus $= \frac{1}{2}$, et la formule $DQ = \frac{2 \sin. B \times \cos. A}{R} + FP$, en supposant l'arc désigné par B de 10° et l'arc moyen AM de 60°, donnera *sin.* 70° = *sin.* 10° + *sin.* 50°; si l'arc B est de 15°, la même formule donnera *sin.* 75° = *sin.* 15° + *sin.* 45°, et ainsi de tous les autres. On voit donc que si l'on a calculé les sinus de tous les arcs au-dessous de 60°, on aura les sinus de tous les arcs au-dessus de 60° par une seule addition. On peut employer

à des abréviations semblables, les troisieme et quatrieme théorêmes. Mais un des usages les plus intéressants de toutes les propositions démontrées ci-dessus, seroit de donner un moyen facile de trouver les sinus et co-sinus des arcs multiples d'un arc donné, et aussi ceux des arcs sous-multiples, dans tel rapport que ce puisse être, pourvu qu'il soit exprimé par un nombre entier.

Pour faciliter encore davantage cette théorie vraiment intéressante, nous allons joindre ici un problême, qui réduit la détermination des sinus et co-sinus des arcs multiples à une loi toujours constante et invariable.

PROBLÊME V.

527. *Supposant une suite d'arcs AB, BD, DE, EF, GH, tous égaux entre eux, et au premier pris pour un arc simple que nous désignerons par A, trouver les sinus et co-sinus des arcs AB, AD, AF, AG, etc. tous multiples du premier, selon la suite des nombres naturels* 1, 2, 3, 4, *etc.* (fig. 16, planche VIII, n° 2).

Préparation à la solution du Problême.

Ayant pris les arcs Ab, Ad, Ae, Af, Ag, etc. respectivement égaux aux arcs AB, AD, AE, AF, AG, etc. et tiré les cordes Bb, Dd, Ee, Ff, Gg, Hh, ainsi que les cordes AD, bE, dF, eG, fH, etc. avec le rayon CB terminé à l'extrémité du premier arc AB, et encore les cordes A'D, B'E, D'F, E'G, etc. auxquelles soit abaissé du centre C le rayon CY qui leur soit perpendicu-

laire, et qui, par conséquent les coupera toutes aux points S, T, V, X en deux parties égales; enfin par les b, d, e, f, soient menées les droites bβ, dδ, eε, fφ parralleles au rayon CA. Cette construction bien entendue, il est visible que les lignes BL, DI, EK, FM, GN, HO, ou leurs égales Kβ, Mδ, Nε, Oφ, seront respectivement égales aux sinus des arcs A, 2A, 3A, 4A, etc. Tandis que les lignes CL, CI, CK, CM, CN, CO, ou leurs égales DS, ET, FV, GX sont les co-sinus des mêmes arcs. Cela posé, il n'y aura plus aucune difficulté à trouver l'expression de ces mêmes lignes, comme on va le voir.

SOLUTION.

Les triangles CLB, DAI, Ebβ, Fdδ, Geε, Hfφ sont tous évidemment semblables, puisqu'ils ont un angle droit et un angle égal; comparant leurs côtés homologues, les deux premiers donnent CB : CL : : AD : DI, ou R : *cos.* A : : 2 *sin.* A : sin. 2A. Comparant le premier au troisieme, on aura CB : CL : : Eb : Eβ ou R : *cos.* A : : 2*sin.* 2A : *sin.* 3A + *sin.* A. De même les triangles CLB et Fdδ donnent CB : CL : : Fd : Fδ, ou R : *cos.* A : : 2 *sin.* 3A : *sin.* 4 A + *sin.* 2 A. On trouvera pareillement que les triangles CBL et Geε donnent CB : CL : : Ge : Gε, ou que R : *cos.* A : : 2 *sin.* 4 A : *sin.* 5 A + sin. 3 A, et ainsi des autres; ce qui fournit cette table pour l'expression des sinus des arcs multiples.

R : *cos.* A : : 2 *sin.* A : *sin.* 2 A + *sin.* 0 A.
R : *cos.* A : : 2 *sin.* 2 A : *sin.* 3 A + *sin.* 1 A.
R : *cos.* A : : 2 *sin.* 3 A : *sin.* 4 A + *sin.* 2 A.
R : *cos.* A : : 2 *sin.* 4 A : *sin.* 5 A + *sin.* 3 A.
R : *cos.* A : : 2 *sin.* 5 A : *sin.* 6 A + *sin.* 4 A.

Pour trouver les co-sinus des mêmes arcs multiples, on se servira des triangles CLB, A'ID, B'PE, D'QF, E'RG aussi semblables, à cause qu'ils ont leurs côtés paralleles chacun à chacun. Les deux premiers donnent CB : CL : : A'D : AI, ou bien R : *cos.* A : : 2 *cos.* A : *cos.* 2 A + R = *cos.* 2 A + *cos.* 0 A. Comparant de même CLB, avec le triangle B'PE, on aura CB : CL : : B'E : B'P ou R : *cos.* A : : 2 *cos.* 2 A : *cos.* 3 A + *cos.* 1 A. On a aussi CL : CB : : D'F : D'Q ou R : *cos.* A : : 2 *cos.* 3 A : *cos.* 4 A + *cos.* 2 A, et ainsi des autres ; ce qui fournit une nouvelle table.

R : *cos.* A : : 2 *cos.* A : *cos.* 2 A + *cos.* 0 A.
R : *cos.* A : : 2 *cos.* 2 A : *cos.* 3 A + *cos.* 1 A.
R : *cos.* A : : 2 *cos.* 3 A : *cos.* 4 A + *cos.* 2 A.
R : *cos.* A : : 2 *cos.* 4 A : *cos.* 5 A + *cos.* 3 A.
R : *cos.* A : : 2 *cos.* 5 A : *cos.* 6 A + *cos.* 4 A.

On voit donc que les différentes expressions des sinus et co-sinus des arcs multiples sont soumises à une loi qu'il est facile de saisir, puisque chaque terme est égal à deux fois le terme précédent multiplié par le rapport du co-sinus de l'arc simple au rayon moins le terme qui est de deux

rangs au-dessous du terme dont on veut avoir l'expression, C. Q. F. T. et D.

N. Les géometres ont nommé *suites recurrentes*, celles de la forme des deux que nous venons de donner, parcequ'en effet, il faut recourir aux termes précédents pour déterminer un terme quelconque.

528. Les formules que nous venons de démontrer ont donné lieu à d'autres expressions des sinus et co-sinus des arcs multiples d'un arc donné pris pour unité, en n'y employant d'autres quantités que les sinus et co-sinus de l'arc primitif; nous les joindrons ici pour compléter cette théorie. Afin d'abréger et simplifier, autant qu'il est possible, nous désignerons le sinus et le co-sinus de l'arc simple par s et par c, le rayon étant fait égal à l'unité, et nous aurons :

sin. $A = s$.

sin. $2A = 2s\sqrt{1-ss}$.

sin. $3A = s - 4s^3$.

sin. $4A = (4s - 8s^3) \times \sqrt{1-ss}$.

sin. $5A = 5s - 20s^3 + 16s^5$.

sin. $6A = (6s - 32s^3 + 32s^5) \times \sqrt{1-ss}$.

sin. $7A = 7s - 56s^3 + 112s^5 - 64s^7$.

sin. $8A = (8s - 80s^3 + 192s^5 - 128s^7) \times \sqrt{1-ss}$.

sin. $9A = 9s - 120s^3 + 432s^5 - 576s^7 + 256s^9$.

$\cos. A = c.$

$\cos. 2A = 2cc - 1.$

$\cos. 3A = 4c^3 - 3c.$

$\cos. 4A = 8c^4 - 8c^2 + 1.$

$\cos. 5A = 16c^5 - 20c^3 + 5c.$

$\cos. 6A = 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1.$

$\cos. 7A = 64c^7 - 112c^5 + 56c^3 - 7c.$

$\cos. 8A = 128c^8 - 256c^6 + 160c^4 - 32c^2 + 1.$

$\cos. 9A = 256c^9 - 576c^7 + 432c^5 - 120c^3 + 9c.$

529. Ces tables peuvent se continuer aussi loin que l'on voudra avec la plus grande facilité ; car il suffit de multiplier un terme quelconque par $\sqrt{1 - ss}$ dans la premiere, et par c dans la seconde ; puis de retrancher du produit le terme qui précede de deux rangs celui dont il s'agit. En observant la loi des nombres de ces deux tables, il seroit facile de trouver pour chacune une ou plusieurs formules générales ; mais cela nous meneroit trop loin, et supposeroit des connoissances de calcul algébrique que nous n'exigeons point dans ces leçons élémentaires. Nous observerons seulement que les mêmes expressions serviront non seulement à trouver les sinus et co-sinus des arcs multiples, mais aussi à diviser un arc donné en tant de parties égales que l'on voudra. On remarquera encore que les mêmes formules peuvent servir à inscrire dans un cercle un polygone régulier quelconque ; ainsi, pour trouver le côté de l'eptagone, il n'y a qu'à supposer l'arc que nous nommons $7A$ égal à la demi-circonférence ; et parceque le sinus de 180° est zéro,

on

on aura l'équation $7s - 56s^3 + 112s^5 - 64s^7 = 0$, ou $64s^7 - 112s^5 + 56s^3 - 7s = 0$, ou en divisant tout par s, $64s^6 - 112s^4 + 56s^2 - 7 = 0$, équation du sixieme degré réductible au troisieme, et qui fait connoître la nature du problême, d'où dépend la construction géométrique de l'eptagone; on trouveroit que le problême est du même degré pour le co-sinus. Comme ces sortes de questions demandent des connoissances sur la résolution des équations des différents degrés, nous n'y insisterons pas davantage. Ceux qui seroient curieux de prendre des connoissances plus étendues sur la construction des tables et sur la théorie des sections angulaires, pourront recourir aux ouvrages de *Viete*, aux Sections coniques du marquis de *l'Hôpital*, aux ouvrages de MM. *Bernouilli*, *Euler et Simpson*; et même aux Principes d'astronomie sphérique que j'ai publiés il y a plusieurs années. Passons à ce qui constitue la trigonométrie proprement dite.

CHAPITRE IV.

De la résolution des triangles par les Tables des Sinus et Tangentes.

530. Les Géometres ont encore cherché à simplifier les calculs de la trigonometrie, en joignant aux tables des sinus et des tangentes les logarithmes des nombres qui expriment les rapports de ces mêmes lignes au rayon; et par ce moyen toutes

les opérations de trigonométrie se réduisent presque toujours à une addition et une soustraction. Les logarithmes des sinus, co-sinus, tangentes et co-tangentes ont été nommés *sinus artificiels* ou *tangentes artificielles;* pour les distinguer des sinus et tangentes véritables qui appartiennent à chaque arc depuis 0 de degrés jusqu'à 90°. On a même poussé l'attention jusqu'à changer la soustraction en une addition qui fît trouver le même résultat, et cela par le moyen de certains nombres que l'on appelle *compléments arithmétiques* des logarithmes qui doivent être soustraits. Avant de passer à la résolution des triangles, soit rectangles, soit obliquangles; il est à propos de fixer ici comment ces nombres se forment, et peuvent se prendre à vue dans les tables à la place de ceux qu'il faudroit soustraire.

DÉFINITIONS.

531. J'appelle complément arithmétique d'un nombre, celui dont tous les chiffres joints avec ceux du nombre proposé font des 9, excepté le dernier qui doit faire 10 avec le dernier chiffre du nombre donné. Par exemple, si le nombre donné est 73064, son complément arithmétique sera 26936. Pour mieux concevoir la nature et l'usage du complément arithmétique, soit le nombre 7843 à ôter du nombre 9564; je remarque que si j'ôtois ce même nombre de 10000, et qu'ensuite j'ajoutasse le reste avec le nombre 9564, ce seroit comme si je l'avois retranché de 19564. Donc pour avoir ce qui doit rester en le retranchant de 9564 seulement, il faut retrancher l'unité qui est

au rang des dixaines de mille. Il en seroit de même de tout autre nombre ; mais pour retrancher le nombre 7843 de 10000, il est visible qu'il n'y a qu'à prendre tous les chiffres qui, joints avec ceux du nombre à soustraire, font des 9, excepté le dernier qui doit faire 10. On voit donc comment, au moyen du complément arithmétique, la soustraction se change en une addition ; et pour quelle raison on doit retrancher de la somme la dixaine qui vient pour le chiffre du rang le plus élevé. Dans notre exemple j'ajoute 2157 avec 9564, et j'ai pour somme 11721, d'où ôtant l'unité du plus haut rang, il vient 1721 pour la différence des deux nombres 9564 et 7843. la même qu'on eût trouvée en ôtant le plus petit du plus grand, comme à l'ordinaire.

On voit de plus, comment on doit s'y prendre lorsqu'il y a plusieurs compléments arithmétiques; car dans ce cas, il faut soustraire autant d'unités au chiffre du rang le plus élevé, qu'on auroit eu de soustractions à faire ; ou, ce qui revient au même, qu'on a ajouté ensemble de compléments arithmétiques. Ceci supposé, passons aux théorêmes qui renferment les principes de la résolution des triangles quelconques, soit rectangles, soit obliquangles.

THÉORÈME I.

532. *Dans un triangle quelconque BAD, les côtés sont entre eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés.*

DÉMONSTRATION.

Soit circonscrit un cercle au triangle BAD (*fig.* 160), et du centre C soient abaissées les perpendiculaires CF, CG, CI à chacun des trois côtés du même triangle ; soient de plus tirés les rayons CA, CB, CD ; il est visible, comme nous l'avons déja observé, que les angles au centre ACG, ACI, BCF, sont respectivement égaux aux angles ABD, ADB et BAD du triangle ; il n'est pas moins visible que les lignes AK, AH et BL sont les sinus des mêmes angles, par la définition des sinus (n°. 508). Enfin, ces sinus sont aussi moitié des côtés AD, AB et BD opposés aux mêmes angles ; donc, puisque les moitiés sont entre elles comme les tous ; il y aura même rapport entre les côtés du triangle, qu'entre les sinus des angles opposés C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

533. Donc s'il y a un angle droit dans un triangle quelconque, le sinus de cet angle sera égal au rayon ou sinus total ; puisque, dans cette supposition, l'angle droit ayant son sommet dans la circonférence, et le côté opposé étant égal au diametre, sa moitié sera égale au rayon, que

nous avons démontré être le sinus de 90°, ou le plus grand de tous les sinus.

De la résolution des Triangles rectangles.

Dans la plupart des traités de trigonométrie, on trouve des tables particulieres pour la résolution de tous les cas des triangles rectilignes rectangles; mais il est aisé de voir que ces cas doivent être essentiellement renfermés dans la résolution de tous ceux des triangles obliquangles; c'est pourquoi on pourroit supprimer cette partie de la trigonométrie, et déduire les solutions propres aux triangles rectangles de celles des triangles rectilignes quelconques. Sans nous astreindre à cette méthode, nous traiterons d'abord de la résolution des triangles rectangles; ensuite nous exposerons les analogies qui peuvent servir à les résoudre plus facilement et plus directement.

534. Soit donc un triangle rectangle BAC, (*fig.* 154), dans lequel on connoît toujours essentiellement l'angle droit de 90°, et dans lequel chacun des angles aigus sur l'hypoténuse, est nécessairement complément de l'autre. Cela posé, il est visible que l'on ne peut faire d'autres combinaisons que les suivantes pour les données de ce triangle; savoir, 1° *ou bien un angle quelconque sur l'hypoténuse avec l'hypoténuse*, 2°. *l'hypoténuse et un côté*, 3°. *ou bien un angle aigu quelconque avec un des côtés de l'angle droit, ou enfin*, 4°. *les deux côtés de l'angle droit.* De plus, il est encore visible que *l'on peut prendre pour rayon*, 1°. *l'hypoténuse*, 2°. *l'un ou l'autre des*

côtés de l'angle droit ; dans le premier cas, chaque côté est le sinus de l'angle qui lui est opposé. Ainsi, prenant BC pour rayon, et le point B pour centre, AC sera le sinus de l'arc CF terminé au côté AB prolongé autant qu'il est nécessaire, ou de l'angle ABC ; et dans la même supposition, le côté AB sera le sinus de l'angle ACB mesuré par l'arc BG, terminé au côté CA, en prenant le point C pour centre.

Dans le second cas, c'est-à-dire lorsque l'on prend un côté quelconque pour rayon, l'autre côté devient la tangente de l'angle compris entre le côté que l'on prend pour rayon et l'hypoténuse. Ainsi AB étant pris pour rayon, AC sera tangente de l'arc AD qui mesure l'angle ABC ; et si c'est la ligne AC que l'on prend pour rayon, la ligne AB sera la tangente de l'arc AE décrit du point C comme centre, ou de l'angle ACB mesuré par cet arc.

COROLLAIRE.

535. Donc la résolution de tous les cas des triangles rectilignes rectangles, se réduira aux analogies suivantes.

Premiere analogie, pour le cas où l'on connoît outre l'angle droit, l'hypoténuse et un des angles ; ou bien l'hypoténuse et un côté.

Le sinus total, est à l'hypoténuse ; comme le sinus de l'angle donné est au côté opposé, ou comme le co-sinus de l'angle donné est au côté adjacent à l'angle donné.

La même analogie servira, si l'on connoît l'hypoténuse et un des côtés de l'angle droit ; lors-

qu'on voudra trouver l'angle opposé à ce côté, en faisant cette proportion qui n'est que l'inverse de la premiere : *l'hypoténuse est au sinus total, comme le côté donné est au sinus de l'angle opposé à ce côté, ou au co-sinus de l'angle compris entre l'hypoténuse et le côté donné.*

Seconde analogie, pour le cas où l'on connoît un côté quelconque avec l'angle adjacent, ou l'angle opposé qui en est toujours le complément. *Le rayon est à la tangente ou à la co-tangente de l'angle donné, comme le côté donné est à l'autre côté.*

536. La même analogie sert aussi pour le cas où l'on connoît les deux côtés de l'angle droit avec l'angle droit ; en la prenant inverse de la précédente. C'est-à-dire *l'un des côtés donnés, est à l'autre aussi donné, comme le rayon est à la tangente de l'angle adjacent au côté pris pour rayon, ou à la co-tangente de l'angle adjacent au côté que l'on prend pour tangente.* Ces deux analogies renferment donc la résolution complette de tous les cas des triangles rectilignes rectangles.

Exemples de la résolution des Triangles rectangles.

PROBLÈME I.

537. *Connoissant l'hypoténuse BC de* 480^t, (fig. 164), *avec l'angle B de* 38° 47′; *trouver chacun des deux côtés AB et AC.*

SOLUTION.

L'angle B étant de 38° 47′, l'angle C qui en est le complément, sera de 51° 13′; cela posé, on fera l'analogie suivante.

Le sinus total est au sinus de l'angle B ou de l'angle C, comme l'hypoténuse est au côté AC ou au côté AB; ou bien, R : *sin.* B : *sin.* C : : BC : AC : AB.

Opération par Logarithmes.

9,796836 = *log. sin.* 38°. 47′.	9,891727 = *log. sin.* 50° 13′.
2,681241 = *log.* 480.	2,681241 = *log.* 480.
2,478077 = *log.* AC = 300^t, 661	2,573098 = *log.* AB = 374^t, 168.

N. B. Lorsque l'on a trouvé, comme on vient de faire, le logarithme d'un nombre de toises ou de mesures quelconques d'un côté inconnu; pour trouver ce nombre avec le plus de précision qu'il est possible, il est bon de chercher par une caractéristique plus forte d'une ou de deux unités, et alors on détermine le nombre que l'on cherche à un dixieme ou un centieme d'unité près.

PROBLÊME II.

538. *Connoissant l'hypoténuse BC de 750 pieds, avec le côté AB de 645 pieds; trouver 1°. l'angle C, 2°. l'angle B, 3°. le troisieme côté.*

SOLUTION.

On fera cette proportion, *l'hypoténuse BC est au côté AB, comme le rayon est au sinus de l'angle C, ou au co-sinus de l'angle B; ou BC : AB : : R : sin. C, ou cos. B;* et ensuite on trouvera le côté AC comme au problême précédent.

Opération par Logarithmes.

2,809560 = *log.* 645 *pieds.*
7,124939 = *com. arit. log.* 750 *pieds.*

9,934499 = *log. sin.* C ou *cos.* B *log. sin. de* 59° 19′ ou *log. co-sin.* 30° 41′.

Donc 1°. l'angle C est de 59° 19′, et l'angle B est de 30° 41′. Pour avoir le côté AC, on fera R : *sin.* 30° 41′ : : BC : AC, ou par logarithmes,

9,707819 = *log. sin.* 30° 41′.
2,875061 = *log.* BC ou de 750 *pieds.*

2,582880 = *log.* AC = 382,719 *pieds.*

PROBLÊME III.

539. *Connoissant un angle et le côté adjacent ou opposé, par exemple l'angle B de 39° 52′, et le côté AB de 584 parties; trouver 1°. l'autre côté, 2°. l'hypoténuse.*

SOLUTION.

Puisque les angles aigus d'un triangle rectangle sont compléments l'un de l'autre, l'angle B étant de 39° 52′, l'angle C sera de 50° 8′ ; on fera donc cette analogie, *le sinus de 50° 8′ est à celui de 39° 52′, comme le côté AB est au côté AC.* Ensuite *le sinus de l'angle C est au côté AB, comme le rayon est à l'hypoténuse BC.*

Opération par Logarithmes.

1°. 2,766413 = *log.* 584 *pieds.*
9,806860 = *log. sin.* 39° 52′.
0,114900 = *comp. arit. log. sin.* de 50° 8′.
2,688173 = *log.* AC = 487,722 *pieds.*

2°. 2,766413 = *log.* 584.
0,114900 = *com. arit.* du *log. sin.* de 50° 8′.
2,881313 = *log.* BC, = 760,873.

On auroit pu résoudre le même problême en prenant la ligne donnée AB pour rayon, et alors le côté AC eût été la tangente de l'angle donné, et la proportion seroit devenue celle-ci :

R : *tang.* 39° 52′ : : AB : AC, et par logarithmes,

2,766413 = *log.* 584.
9,921760 = *log. tang.* 39° 52′.
2,688173 = *log.* AC = *log. de* 487,722 *pieds.*

PROBLÊME IV.

540. *Connoissant les deux côtés de l'angle droit, l'un AB de 895^t et l'autre AC de 769; trouver* 1°. *les angles aigus en B et en C,* 2°. *l'hypoténuse.*

SOLUTION.

En prenant l'un des côtés donnés pour rayon, l'autre côté donné sera la tangente de l'angle opposé, ou la co-tangente de l'angle opposé au côté qui est pris pour rayon. On aura donc cette proportion 895 : 769 : : R : *tang.* B ou *cot.* C, et par logarithmes.

2,885926 = *log.* 769.
7,048177 = *comp. arit. log. de* 895.

9,934103 = *log. tang.* B = 40° 40′ 11″.

Pour avoir ensuite l'hypoténuse, on fera cette analogie qui est celle du premier problême, le sinus de 40° 40′ 11″ : AC (895) : : R : BC, et par logarithmes,

2,885926 = *log.* 769.
0,185954 = *com. arit. log. sin.* 40° 40′ 11″.

3,071880 = *log.* BC ou *log.* de 1180^t.

SCHOLIE.

541. (*fig.* 165). On peut trouver dans la pratique nombre de cas où la résolution des triangles rectangles sert à déterminer ce que l'on cherche. Si, par exemple, la ligne AB exprime la distance

horizontale d'un point A au pied d'une tour dont on veut mesurer la hauteur, par le moyen de l'angle B observé avec un instrument propre à cet usage; il est visible que cette hauteur sera déterminée par le problême troisieme. Ce même problême serviroit encore à mesurer la largeur d'une riviere, en supposant que la ligne AC soit perpendiculaire à la direction de la riviere, et terminée à un objet C qui est sur le bord opposé à la rive qui est du côté du point A; et qu'ayant mesuré la ligne AB perpendiculaire à AC, on ait aussi observé du point B l'angle que fait le rayon AB avec BC. On se sert encore très souvent des triangles rectangles pour mesurer les hauteurs du soleil sur l'horizon, par la longueur d'un style ou gnomon AC élevé perpendiculairement à l'horizon, et par celle de son ombre mesurée sur la même échelle de parties égales. Nous ne pouvons faire ici le détail de toutes les questions où l'on peut appliquer la résolution des triangles rectangles; c'est à celui qui pratique d'examiner les cas où chaque problême peut être employé plus heureusement. Passons à la résolution des triangles obliquangles.

De la résolution des Triangles obliquangles.

542. Tous les cas des triangles obliquangles se réduisent aux quatre suivants. 1°. *Deux côtés connus, et l'un des angles opposés;* 2°. *deux angles avec l'un des côtés opposés à ces angles;* 3°. *deux côtés connus avec l'angle compris;* 4°. *les trois côtés donnés.* Les deux premiers cas se ré-

solvent par le théorême général des côtés proportionnels aux sinus des angles opposés, (n°. 532).

Voyons d'abord des exemples de ces deux-ci, ensuite nous passerons à la résolution des deux derniers, et aux applications qu'ils peuvent avoir.

PROBLÊME I.

543. *Connoissant le côté AB* (fig. 166) *d'un triangle ACB de 2850^t, avec les deux angles en A et en B, l'un de 38° 23′ l'autre de 49° 52′; trouver les côtés BC et AC opposés à ces angles.*

SOLUTION.

Puisque les trois angles d'un triangle quelconque ne valent que deux droits; il est évident que la connoissance des deux angles en A et en B, donne essentiellement la valeur de l'angle C opposé au côté connu AB; ainsi ce cas est précisément celui où l'on connoît deux angles avec l'un des côtés opposés à ces angles. On fera donc les proportions suivantes pour déterminer chaque côté, *sin.* C : AB : : *sin.* A : BC, et *sin.* C : AB : : *sin.* B : AC. A cause que l'angle C est dans les suppositions actuelles de 91° 44, il en faut chercher le sinus par celui de son supplément, qui est 88° 16′; *sin.* 91° 44′ : 2850 : : *sin.* 38° 24′ : BC, et *sin.* 91° 44′ : 2850 : : *sin.* 49° 52′ : AC.

Opération par Logarithmes.

3,455845 = *log.* 2860	3,454845
9,793195 = *log. sin.* 38° 24′	9,883404 = *log. sin.* 49° 52′.
0,000199 = *C. arit. log. sin.* 88° 16′	0,000199
3,248239 = *log.* BC = 1771,16	3,338448 = *log.* AC = 2179,964

SCHOLIE.

Ce prbolême sert à fixer la position des principaux objets d'une grande carte, par le moyen d'une base AB mesurée avec le plus de précision qu'il est possible, et des angles observés en A et en B, formés avec cette même base par des rayons visuels dirigés de ses extrémités au point C, dont on veut avoir la position. Il faut avoir attention, en mesurant les angles sur la base AB, de ne prendre que ceux qui ne sont pas trop obtus ni trop aigus; parceque les lignes se coupent alors trop obliquement, et ne peuvent donner avec assez de précision la position exacte du point que l'on veut fixer sur la carte.

PROBLÊME. II.

544. *Connoissant deux côtés AC* (fig. 166) *et BC d'un triangle BAC avec l'un des angles A opposés à ces côtés; sachant de plus de quelle espece est l'angle opposé à l'autre côté, c'est-à-dire s'il est obtus ou aigu; trouver toutes les autres parties du triangle.*

SOLUTION.

On voit aisément pourquoi nous supposons que l'on sait de quelle espece est l'angle inconnu B, opposé au côté connu AC. Car si l'on décrit du sommet C comme centre, un arc de cercle qui coupe le côté AB en B′, on fera un autre triangle ACB′ qui auroit précisément les mêmes données que le triangle ACB; savoir, les côtés AC et CB′,

égaux aux côtés AC et CB du dernier ; et l'angle A supposé connu, est également opposé à un côté connu dans chaque triangle. Le problême seroit donc susceptible de deux solutions, si l'on n'y joignoit la condition que nous avons ajoutée pour le déterminer. Dans la pratique, les opérations que l'on a faites sur le terrain, font toujours connoître quelle est la condition qui a lieu. Soit donc l'angle en A observé de 38° 45′, le côté AC de 2640^{t}, et le côté CB opposé à l'angle donné de 2486^{t}. sachant de plus que l'angle B doit être aigu, on déterminera cet angle B par l'analogie suivante CB : *sin.* 38° 45′ : : AC : *sin.* B, et par logarithmes,

3,421604 = *log.* 2640 ou *log.* AC.
9,796521 = *log. sin.* 38° 45′.
6,604499 = *com. arit. log.* 2486 ou CB.

9,822624 = *log. sin.* B = 41° 39′ 33″.

Donc l'angle C sera de 99° 35′ 27″, ce que l'on trouve en retranchant la somme des angles B et C de 180°. Avec cet angle on calculera le côté AB par l'analogie commune comme il suit :

Sin. 38°. 45′ : BC : : *sin.* 99° 35′ 27″ : AB, et par logarithmes,

3,395501 = *log.* BC.
9,993887 = *log. sin.* 99° 35′ 27″.
0,203479 = *com. arit. sin.* 38° 45′.

3,592867 = *log.* de 3916,21^{t} = AB.

PROBLÊME. III.

545. *Connoissant dans un triangle quelconque BAC* (fig. 167), *deux côtés AB et AC, et l'angle compris ; trouver* 1°. *chacun des deux autres angles*, 2°. *le troisieme côté.*

PREMIERE SOLUTION.

Comme je ne connois dans les données du problême aucun côté qui soit opposé à un angle donné, il est visible que je ne puis arriver à découvrir les angles sur le côté inconnu BC par l'analogie ordinaire, ou par la proportion entre les côtés et les sinus des angles opposés. Je chercherai donc à former quelque triangle où je puisse faire usage de cette analogie, et dont la connoissance de ses parties me conduise à celle des parties du triangle proposé. Pour cet effet, j'abaisse la perpendiculaire CD d'un angle inconnu quelconque C sur le côté AB ; et je vois sur le champ qu'au triangle ADC je connois trois choses ; savoir, 1°. l'angle droit D que je viens de former par la perpendiculaire, 2°. le côté AC qui est connu, comme on le suppose, 3°. l'angle en A qui est pareillement supposé donné. J'aurai donc la valeur de l'angle ACD, complément de l'angle A, et par conséquent je trouverai le segment AD par cette proportion ; *le sinus total est à l'un des côtés donnés* AC, *comme le co-sinus de l'angle donné est au segment* AD. Si je retranche ce segment AD du côté AB qui est pareillement connu, j'aurai l'autre segment BD. Je remarque encore

que

que si je prends la ligne CD pour rayon, les lignes AD et BD seront les tangentes des angles ACD et BCD; on aura donc cette nouvelle proportion AD : BD :: *tang.* ACD : *tang.* DCB ; mais on connoît déja l'angle ACD partie de l'angle ACB ; on connoîtra donc l'angle DCB, et par conséquent l'angle total ACB; d'où l'on conclura la valeur du troisieme angle B, et par l'analogie ordinaire, le troisieme côté. C. Q. F. T. et D.

Lemme par la solution suivante.

546. *Si l'on connoît la somme et la différence de deux quantités quelconques; je dis que la plus grande vaut la moitié de la somme plus la moitié de la différence; et la plus petite vaut la moitié de la somme moins la moitié de leur différence.*

DÉMONSTRATION.

Soient A et B les deux quantités dont S soit la somme, et D la différence. Il est visible que j'aurai la plus grande, en ôtant la plus petite de la somme qui contient la plus grande et la plus petite; c'est-à-dire que $A = S - B$. Pareillement j'aurai encore la plus grande en ajoutant à la plus petite la différence ou l'excès de la plus grande sur cette plus petite; c'est-à-dire que l'on a encore $A = D + B$; donc en ajoutant ces deux valeurs de la plus grande, on aura $2A = S + D$, et par conséquent $A = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}D$. C'est-à-dire que *la plus grande de deux quantités vaut la moitié de leur somme plus la moitié de leur différence*; et si de cette valeur de la plus grande on en retranche l'excès D de cette plus grande sur la plus petite,

on aura la plus petite ou $B = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}D - D = \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}D$; c'est-à-dire que la plus *petite vaudra la moitié de la somme moins la moitié de la différence. C. Q. F. D.*

Cela posé, il sera facile d'entendre l'analyse de la seconde solution suivante du dernier problême.

SECONDE SOLUTION.

547. Soit toujours le triangle BAC (*fig.* 168), dans lequel on suppose les côtés AB, AC connus avec l'angle en A renfermé par ces côtés. Je vois que quoique je ne connoisse dans ce même triangle aucun des deux angles en B et en C, néanmoins à cause que les trois angles d'un triangle pris ensemble valent deux droits, je connois la somme de ces deux angles, en ôtant l'angle donné de 180°. Si donc je pouvois arriver à connoître leur différence, je viendrois à fixer chacun en particulier, par le lemme précédent. Dans cette vue, du point A comme centre avec le rayon AC, je décris une circonférence qui coupe le côté AB en D, et son prolongement en F, et je tire les cordes CD, CF ; cela fait j'apperçois que chacun des angles ACD et ADC étant la moitié du supplément de l'angle donné A sera connu, et qu'il est égal à la demi somme des angles inconnus B et C ; de plus, puisque l'angle ACB est le plus grand des deux angles, il vaut la moitié de leur somme plus la moitié de leur différence, par le dernier lemme. Donc puisque ACD est la demi-somme, DCB sera la demi-différence. Donc si je tire DG parallele à BC, l'angle CDG sera encore égal à la

même demi-différence des angles C et B. Enfin, à cause de l'angle DCF qui est droit, par construction, si je décris du point D comme centre, avec le rayon DC une portion de cercle terminée au côté DF; je vois qu'en prenant cette même ligne DC pour rayon, la ligne CF sera la tangente de l'angle CDF égal à la demi-somme des angles B et C, et la ligne CG sera la tangente de l'angle CDG égal à la demi-différence des mêmes angles; mais à cause des paralleles BC, DG les lignes BF, CB sont coupées proportionnellement, et donnent BF ou AB + AC : BD ou AB — AC : : CF : CG; c'est-à-dire que dans tout triangle où l'on connoît deux côtés et l'angle compris; on aura l'analogie suivante, pour déterminer la demi-différence des angles inconnus B et C. *La somme des deux côtés donnés est, à leur différence; comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés, est à la tangente de la demi-différence des mêmes angles. C. Q. F. T. et D.*

Cette derniere solution a l'avantage de faire trouver par une seule analogie les deux angles inconnus B et C; c'est aussi celle que l'on emploie le plus communément : appliquons ces deux solutions à quelque exemple en nombre.

EXEMPLE.

548. Supposons donc que l'angle A soit de 42° 26′; le côté AB de 2586′ et le côté AC de 2354; et qu'il faille trouver les angles B et C avec le côté opposé à l'angle donné A. En faisant usage de la premiere solution, et supposant que l'on ait abaissé de l'un des angles inconnus comme C

la perpendiculaire CD ; on déterminera le premier segment AD par l'analogie qui suit :

R : AC ou 2354^t : : *cos.* A ou *cos.* 42° 26′ : AD, et par logarithmes.

9,868093 = *log. cos.* 42° 26′.
3,371806 = *log.* 2354.

3,239899 = *log.* AD = 1737, 4^t.

Donc le segment BD sera de 848,6^t. Pour avoir ensuite l'angle DCB, on fera la proportion AD : BD : : *tang.* 47° 34′ : *tang.* DCB, et par logarithmes :

10,038962 = *log. tang.* 47° 34′.
2,928703 = *log.* de 848,6^t.
6,760101 = *C. arit. log.* 1737,4^t.

9,727766 = *log. tang.* 28° 6′ 52″.

Donc l'angle total ACB sera de 75° 40′ 52″, et l'angle B de 61° 53′ 8″. Avec l'un des angles connus B et C, et l'un des côtés connus AB, AC, et l'angle A, on trouvera la valeur du côté BC, par l'analogie ordinaire.

549. Si l'on veut résoudre le même problème par la seconde méthode, on fera cette proportion AB + AC : AB — AC : : *tang.* $\frac{1}{2}$(C + B) : *tang.* $\frac{1}{2}$(C — B) ou 4940 : 232 : : *tang.* 68° 47′ : *tang.* $\frac{1}{2}$(C — B), et par logarithmes :

10,410934 = *log. tang.* 68° 47′.
2,365488 = *log.* 232.
6,306273 = *C. arit. log.* 4940.

9,082695 = *log. tang.* $\frac{1}{2}$(C — B) = *log. tang.* 6° 53′ 52″.

Ajoutant cet angle avec le demi-supplément de l'angle A, ou la demi-somme des angles B et C, on aura pour l'angle C 75° 40′ 52″, comme ci-devant; d'où l'on concluroit de même la valeur du côté BC s'il en étoit besoin. Nous verrons par la suite l'usage de ce problême pour mesurer des distances inaccessibles.

PROBLÊME IV.

550. *Connoissant les trois côtés d'un triangle BAC, trouver celui qu'on voudra des trois angles du même triangle.*

PREMIERE SOLUTION.

Comme je ne connois aucun des angles du triangle BAC (*fig.* 169), il est évident que je n'en puis découvrir un seul par la proportion entre les sinus des angles et les côtés opposés; je chercherai donc à former quelque triangle rectangle comme BDC, en abaissant une perpendiculaire d'un des angles inconnus comme A sur le côté opposé AC; et je vois que dans le triangle ADC je connoîtrai l'angle droit D avec le côté opposé AC: mais j'ignore encore toutes les autres parties de ce même triangle. Je vois de même qu'au triangle ADB je ne connois que l'angle droit en D avec le côté AB qui lui est opposé. J'apperçois cependant que quoique je ne connoisse aucun des segments formés par la perpendiculaire AD, néanmoins je connois leur somme; je parviendrois donc à déterminer chacun d'eux exactement, si je pouvois connoître leur différence BF; dans cette vue du point A com-

me centre avec le rayon AC, je décris une circonférence entiere qui coupe la ligne BC en F, et le côté AB en G, ainsi que son prolongement en L; et alors les lignes sécantes extérieures BC, BL me donnent BC : BL : : BG : BF; ou BC : AB + AC : : AB — AC : BD — DC. Or dans cette proportion les trois premiers termes sont connus, et le quatrieme terme est la différence des segments BD et DC, dont je connois la somme; donc cette différence sera connue, et par conséquent chacun des segments BD et DC; au moyen desquels on pourra trouver l'angle B et l'angle C dans le triangle rectangle ADB, et dans le triangle aussi rectangle ADC.

551. Si l'un des angles du triangle BAC est obtus comme l'angle C (*fig.* 170), et que l'on abaisse la perpendiculaire AD de l'un quelconque des angles aigus, cette ligne tombera au dehors du triangle, et dans ce cas les segments formés par la perpendiculaire seront BD et CD; dont BC sera la différence, au lieu d'être la somme; mais on aura toujours BC : AB + AC : : AB — AC : BF = BD + CD : ainsi le quatrieme de la proportion sera la somme des segments BD et CD.

Donc en général dans un triangle quelconque dont les trois côtés sont connus, si d'un angle quelconque on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé; ou aura toujours cette proportion pour déterminer les segments formés par cette perpendiculaire.

Un côté quelconque est à la somme des deux autres; comme la différence des mêmes côtés est à la différence ou à la somme des segments de ce

premier côté, formés par une perpendiculaire abaissée de l'angle opposé sur ce côté; savoir, la différence des segments, lorsque la perpendiculaire tombe au-dedans du triangle; et la somme des mêmes segments, lorsque la perpendiculaire tombe au-dehors.

EXEMPLE.

552. Soient les trois côtés BC, AB et AC donnés du triangle BAC chacun respectivement de 5800^t, 4760^t et 4230^t: on aura donc cette proportion pour déterminer la différence des segments BD et DC, 5800 : 8990 : : 530 : BF que l'on trouvera de 821^{t}5. Donc BD sera de 3310,7, et DC de 2489,3, ainsi pour avoir l'angle B on fera cette proportion AB (4760^t) : R : : BD (3310,7) : *cos.* B; et pour avoir l'angle C on fera de même AC (4230^t) : R : : DC (2489,3) : *cos.* C, et par logarithmes pour l'une et l'autre analogie on aura:

13,519919 = *log.* de 3310,7 + *log.* R.
3,677607 = *log.* de 4760 à soustraire.

9,842312 = *log. sin. cos.* B = 45° 55′ 52″.

13,396077 = *log.* de 2480,3 + *log.* R.
3,626340 = *log.* de 4240, à soustraire.

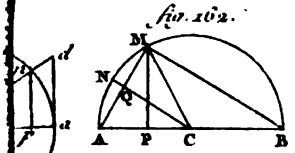
9,769737 = *log. cos.* C = 53° 57′ 1″.

Donc le troisieme angle en A sera de 80° 7′ 7″.

SECONDE SOLUTION

553. Si l'on se rappelle la solution du problême du n°. 327 (*fig.* 122, *planche* 8) où il s'agissoit de trouver le centre d'un cercle qui touchât les trois côtés d'un triangle donné BAC, on verra aisément que chacune des lignes AG, BG, CG divisant l'angle par lequel elle est menée en deux également, si l'on prend chacune de ces lignes pour rayon; celui FG ou GD du cercle inscrit au triangle, sera le sinus de la moitié de l'angle auquel il est opposé; on aura donc cette analogie pour déterminer un angle quelconque; l'angle A, par exemple, AG: FG:: R : *sin.* $\frac{1}{2}$ BAC; ainsi voyons comment on pourroit exprimer la ligne AG en n'y employant que les valeurs des trois côtés du triangle; car nous avons déja vu au n°. 334, que l'expression de la FG est $\sqrt{\frac{AF \times BF \times Bf}{Af}}$. Cela posé à cause du triangle rectangle AFG, on aura $\overline{AG}^2 = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{FG}^2}$, et en mettant pour $\overline{FG}^2$ sa valeur $\frac{AF \times BF \times Bf}{Af}$, puis réduisant $\overline{AF}^2$ au même dénominateur, on aura cette nouvelle proportion au lieu de la premiere $\sqrt{\frac{\overline{AF}^2 \times Af + AF \times BF \times Bf}{Af}}$: $\sqrt{\frac{AF \times BF \times Bf}{Af}}$:: R : *sin.* $\frac{1}{2}$ BAC. Divisant l'antécédent et le conséquent du premier rapport par

fig. 162.



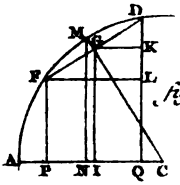


fig. 163

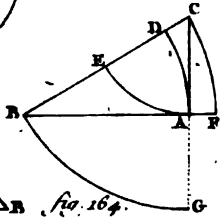


fig. 164.

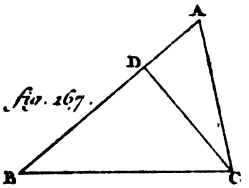
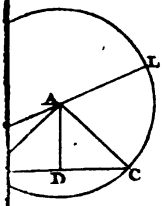


fig. 167.



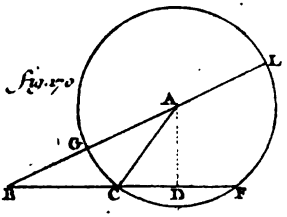
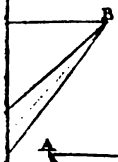


fig. 170



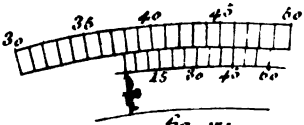


fig. 171.

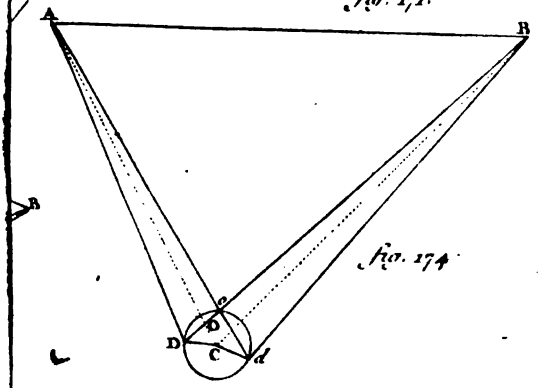


fig. 174.

$\sqrt{\frac{AF}{Af}}$; cette proportion se réduit à celle-ci. $\sqrt{AF \times Af + BF \times Bf} : \sqrt{BF \times Bf} :: R : sin. \frac{1}{2} BAC$. Présentement si l'on met dans le premier antécédent pour Af et AF, pour BF et Bf leurs valeurs respectives, $\frac{AB+BC+AC}{2}$, $\frac{AB+BC+AC}{2} - BC$, $\frac{AB+AC+BC}{2} - AC$, et $\frac{AB+AC+BC}{2} - AB$, on verra en faisant les multiplications indiquées, que le premier terme se réduit à $\sqrt{AB \times AC}$. Donc la proportion devient enfin celle-ci $\sqrt{AB \times AC} : \sqrt{BF \times Bf} :: R : sin. \frac{1}{2} BAC$. C'est-à-dire que dans un triangle rectiligne quelconque dont on connoît les trois côtés, on aura la proportion suivante pour déterminer un angle quelconque par le sinus de sa moitié ; *le produit des deux côtés qui renferment l'angle cherché, est au produit des différences de ces côtés à la demi-somme des trois côtés ; comme le quarré du rayon est au quarré du sinus de la moitié de l'angle cherché. C. Q. F. T. et D.*

Pour employer cette analogie en opérant par les logarithmes, voici à quoi se réduit le procédé ; *on ajoutera ensemble les logarithmes des différences de chacun des côtés qui renferment l'angle à la demi-somme des trois côtés, et les compléments arithmétiques des logarithmes de ces mêmes côtés qui renferment l'angle demandé ; la moitié de cette somme sera le logarithme du sinus de la moitié de l'angle cherché.* Car on sait

que pour prendre les racines des quantités par les logarithmes; il faut prendre la moitié de leurs logarithmes, et comme il y a deux dixaines à retrancher pour les deux compléments arithmétiques; il n'est point question du logarithme du quarré du rayon qui seroit toujours 20,000000. Appliquons tout ceci à un exemple.

EXEMPLE

554. Soit repris le triangle de la figure 169 dont nous avons supposé les côtés BC, AB et AC chacun respectivement de 5800, 4760 et 4230 toises : et soit A l'angle dont on demande la valeur : on opérera comme il suit :

5800.	7395.	7395.
4760.	4760.	4230.
4230.	2635.	3165.
1479.		

$7395 = \frac{AB+AC+BC}{2}$, donc les différences de chacun des côtés qui renferment l'angle, seront l'une de 2635, et l'autre de 3165, on aura donc:

3,420781 = *log.* 2635.
3,500374 = *log.* 3165.
6,322393 = *com. arit. log.* 4760.
6,373660 = *com. arit. log.* 4230.

19,617208.
9,808604 = *log. sin.* $\frac{1}{2}$BAC = 40° 3′ 34″.

Donc l'angle BAC sera de . . . 80° 7′ 8″.

SCHOLIE.

555. Le problême IX du n°. 336, (*plan.* 8., *fig.* 123) pourroit encore servir à faire connoître un angle quelconque d'un triangle BAC dont les trois côtés sont donnés ; car il est évident que l'on aura cette proportion AG : AF : : R : *sin.* ABC. Or on a démontré au même problême que la ligne AG ou le rayon du cercle circonscrit au triangle, est égal au produit des trois côtés divisé par quatre fois l'aire du triangle ; on aura donc en se servant de l'expression de la surface du triangle du n°. 336, $\frac{AB \times AC \times BC}{4\,BAC} : \frac{1}{2}AC : : R :$ *sin.* ABC, ou multipliant par 4 BAC, l'antécédent et le conséquent du premier rapport, et divisant ces deux termes par AC ; $AB \times BC : 2\sqrt{Af \times AF \times BF \times Bf} : :$ R : *sin.* ABC ; mais, comme on le voit aisément, cette formule donne l'angle demandé sous une forme plus compliquée qu'aucune des deux solutions précédentes ; ainsi l'on s'en tient dans la pratique aux deux premieres solutions que nous avons données.

Les problêmes que l'on vient de résoudre suffisent pour tous les cas de la résolution des triangles ; il faut voir présentement quelles sont les applications les plus heureuses qu'on en puisse faire, et comment on doit s'y prendre dans la pratique pour déterminer et mesurer les angles avec le plus de précision qu'il est possible ; mais avant de passer aux différents exemples que nous nous proposons d'ajouter ; nous joindrons en-

core le chapitre suivant, dans lequel on traitera des triangles sphériques, parceque l'on ne peu faire certaines opérations relatives à la réduction des angles au plan de l'horizon, sans cette connoissance.

CHAPITRE V.

De la trigonométrie sphérique, où l'on donne des regles générales pour la résolution de tous les cas possibles, des triangles sphériques, rectangles obliquangles.

§ Ier. Définitions.

556. *Un triangle sphérique n'est autre chose qu'une portion de la surface d'une sphere terminée par trois arcs, de grands cercles appartenants à la même sphere, et décrits sur cette même surface :* ainsi les trois arcs AB, AC, et BC (*fig.* 1ere, *planche* XI, n° 2) forment par leur intersections le triangle sphérique BAC.

On voit par cette définition que tout triangle sphérique, comme tout triangle rectiligne a essentiellement trois côtés et trois angles. Les côtés AB, AC et BC sont, comme on vient de le dire, les arcs de grands cercles tracés sur la surface d'une même sphere, et qui se coupent aux points A, B, C. Les angles du même triangle sont les mêmes que ceux formés par les plans AGB, AGC, BGC des grands cercles qui passent tous par le centre G de la sphere. D'après ce qui a été dit

n° 380, on voit que ces angles doivent se mesurer par des lignes perpendiculaires au même point de leur commune section. On voit donc que si par le point A on mene les lignes AF, AK tangentes des arcs AC, AB, et par conséquent perpendiculaires au même point A, de leur commune section AG, l'angle FAK sera le même que l'angle sphérique BAC. Si cet angle est droit, le triangle sphérique est *rectangle;* et le côté BC qui lui est opposé se nomme *hypoténuse.* Si aucun des angles du triangle sphérique n'est droit, le triangle sphérique, est nommé simplement *triangle sphérique,* ou *triangle sphérique obliquangle.* On voit encore que tout triangle sphérique forme une espece de pyramide AGBC, terminée par trois secteurs AGB, AGC, BGC; et par la portion de la surface de la sphere qui constitue ce même triangle sphérique.

COROLLAIRE.

557. Il suit des définitions précédentes, que les arcs de cercle tracés sur la surface de la sphere par des plans qui ne passent pas par son centre, ne peuvent pas appartenir aux triangles sphéririques; et que les petits cercles de la sphere n'ont presque aucun usage dans la trigonométrie sphérique.

Une ligne PGp perpendiculaire au plan d'un grand cercle DBAE, et qui passe par son centre, se nomme *l'axe* de ce grand cercle. Les points P, p où cette ligne rencontre la surface de la sphere,

sont nommés les *poles* de ce même grand cercle. De plus, si l'on imagine tant de petits cercles que l'on voudra paralleles au plan du cercle DBAE, le même axe sera perpendiculaire aux plans de tous ces petits cercles; et les mêmes points P, p seront aussi les *poles* de ces petits cercles.

COROLLAIRE I.

558. Si par les extrémités A et B d'un arc du grand cercle DBAF, et par son axe GP, on fait passer deux plans AGP et BGP, l'angle APB, formé par ces deux plans, sera évidemment mesuré par l'arc AB; puisque la ligne GP étant perpendiculaire au plan du grand cercle DBE, est aussi nécessairement perpendiculaire aux lignes AG, BG qui passent par son pied (n° 366). On voit encore que si dans le plan du petit cercle *dbae* parallele à celui du grand cercle DBAE, on mene les rayons ag, bg, l'angle AGB peut encore être mesuré par l'arc ab du petit cercle; puisque les angles AGB, *agb* sont du même nombre de degrés; et c'est le seul cas où l'on fasse quelquefois usage des arcs de petits cercles de la sphere, dans la trigonométrie sphérique.

COROLLAIRE II.

559. Donc chaque pole d'un grand cercle est éloigné de tous les points de sa circonférence de 90°; et tous les arcs menés du pole d'un petit cercle aux différents points de sa circonférence, sont d'un même nombre de degrés.

COROLLAIRE III.

560. Donc tous les arcs de grands cercles menés du pole d'un cercle aux différents points de sa circonférence, sont perpendiculaires à ce même grand cercle. Il faut entendre la même chose des arcs menés par les poles d'un petit cercle à tous les points de sa circonférence.

COROLLAIRE IV.

561. Donc pour trouver les poles d'un cercle quelconque DBAE; il n'y a qu'à faire passer par son centre, et par deux points quelconques A, B de sa circonférence deux arcs de cercles perpendiculaires au plan de ce même grand cercle; les points P, p où ces arcs se coupent, seront les poles de ce même cercle.

COROLLAIRE V.

562. Donc si un angle sphérique BAC est droit; les côtés AB, AC de ce même angle droit passent réciproquement par les poles l'un de l'autre; c'est-à-dire que le côté AB passera par le pole du plan AGC; et que le côté AC passera par celui du plan AGB.

THÉORÈME I.

563. *Dans un triangle sphérique quelconque BAC* (fig. 1) *la somme de deux côtés, pris comme l'on voudra, est toujours plus grande que le troisième.*

DÉMONSTRATION.

Concevant que l'on ait tiré les cordes des arcs AB, AC et BC, on aura un triangle rectiligne dans lequel deux côtés, pris comme l'on voudra seront plus grands que le troisieme; donc aussi au triangle sphérique BAC, deux côtés quelconques pris ensemble seront plus grands que le troisieme; puisque chaque arc de cercle est plus grand que la corde qui lui répond. C. Q. F. D.

THÉORÊME II.

564. *La somme des trois côtés d'un triangle sphérique quelconque est toujours moindre que* 360°.

DÉMONSTRATION.

Ayant prolongé les côtés AB, AC jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau en A', les arcs ABA', ACA', seront chacun de 180°; mais au triangle sphérique BA'C, les côtés A'DB, A'PC pris ensemble sont plus grands que le côté BC; donc puisque les arcs ACA', ABA' ne valent que 360°, on aura toujours moins que 360° pour la somme des trois côtés AB, AC et BC du triangle sphérique BAC. C. Q. F. D.

THÉORÊME III.

565. *La somme des trois angles d'un triangle sphérique ne peut jamais valoir moins que deux angles droits, ni s'élever à six angles droits.*

DÉMONSTRATION.

DÉMONSTRATION.

Si les côtés AB, AC et BC du triangle sphérique sont infiniment petits; les rayons GA, GB, GC seront infiniment près de se trouver paralleles; les trois arcs de cercle se confondent sensiblement avec leurs cordes; et le triangle sphérique ne differe pas d'un triangle rectiligne: or on sait que dans un tel triangle la somme des trois angles est toujours égale à deux droits, et ne peut être moindre; donc aussi la somme des trois angles d'un triangle sphérique, dont les côtés sont infiniment petits, ne vaut pas moins que deux angles droits. C. Q. F. 1°. D.

2°. Si l'on fait attention aux angles du triangle sphérique BA'C, on verra que les angles CBA', BCA' sont chacun supplément des angles aigus, ABC, ACB du triangle BAC, et par conséquent obtus; puisque deux plans qui se coupent forment toujours deux angles de suite, qui pris ensemble valent deux droits, et parceque l'angle BAC, ou son égal BA'C peut aussi lui-même être obtus; il s'ensuit que dans un triangle sphérique, les trois angles peuvent valoir chacun infiniment près de 180°; donc la somme des trois angles peut approcher à l'indéfini de 540° ou de six droits, qui en sont la seconde limite. C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE I.

561. Donc un triangle sphérique peut avoir ses trois angles droits ou même ses trois angles obtus; d'où il suit que *la connoissance des deux*

angles d'un triangle sphérique ne suffit pas pour nous faire connoître le troisieme ; différence remarquable entre les triangles sphériques et les triangles rectilignes.

COROLLAIRE II.

562. Si les trois angles d'un triangle sphérique sont droits, obtus ou aigus ; ses trois côtés seront aussi chacun de 90°, ou plus grands, ou plus petits que 90°.

SCHOLIE.

563. On voit par ces théorêmes en quoi les triangles sphériques different essentiellement des triangles rectilignes. D'un autre côté, ils ont aussi plusieurs propriétés qui leur sont communes avec les triangles rectilignes, et qui se démontrent précisément de la même maniere.

Par exemple, on feroit voir, comme dans la géométrie élémentaire, que *deux triangles sphériques sont égaux en tout ;* 1°. *lorsque les trois côtés de l'un sont égaux aux trois côtés de l'autre ;* 2°. *lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux ;* 3°. *lorsqu'ils ont des angles égaux sur des bases égales.*

564. On fera voir encore de même qu'un *triangle sphérique est équilatéral, isoscele ou scalene ; selon qu'il a ses trois angles égaux, ou deux de ses angles égaux, ou ses trois angles inégaux ;* et réciproquement pour les trois cas. Toutes ces vérités se démontrent de la même maniere que pour les triangles rectilignes ; ainsi il

seroit superflu de s'y arrêter plus long-temps. Passons à un théorême qui nous sera de la plus grande utilité dans toute la suite de ce traité.

THÉORÊME IV.

565. *Si des trois angles d'un triangle sphérique BAC comme poles, on décrit sur la surface de la sphere trois arcs de cercle, qui se coupent aux points D, E, F; on formera un nouveau triangle DEF, dont les côtés seront suppléments des angles opposés du triangle BAC; et dont les angles seront aussi suppléments des côtés du même triangle; et réciproquement*, (fig. 2).

DÉMONSTRATION.

Soient prolongés les côtés AB, AC et BC du triangle BAC, jusqu'à ce qu'ils rencontrent ceux du triangle DEF aux points G, H, I, K, L, M. A cause que (par hypothese) les points B, A, C sont les poles des arcs EF, DF et DE du triangle DEF; les arcs AG, AH; BI, BK; CL, CM seront chacun de 90°. Et si l'on conçoit encore les arcs AF, AD; CE, CD; BF, BE; ces nouveaux arcs seront aussi de 90°; d'où il suit que les points D, E, F sommets des angles du nouveau triangle, seront les poles des côtés du triangle BAC (n° 561).

Cette construction bien entendue, à cause que le point A est le pole de l'arc DF, et que B est celui de l'arc EF, on aura AG et BK chacun de 90°, ou AG + AK + AB = 180°; mais le point F étant le pole de l'arc AB, l'angle DEF a pour mesure l'arc GAK, dont AB est le supplément,

donc l'angle F du triangle DEF est supplément du côté AB qui lui est opposé, au triangle BAC ; on démontrera de même que l'angle E a pour mesure IM supplément de BC, puisque les arcs BI, CM sont chacun de 90° ; et que l'angle D a pour mesure LH supplément de AC ; à cause des arcs BI, CM ; AH, CL chacun de 90°. Donc 1°. les angles du nouveau triangle sont suppléments des côtés du triangle BAC. C. Q. F. 1°. D.

Il n'est pas moins évident que le point F étant le pole de l'arc AB, et D celui de l'arc AC, les arcs GF, DH seront chacun de 90°, ce qui donnera GF + DG + GH ou DF + GH = 180°. Mais à cause que le point A est le pole de l'arc DF, les arcs AG, AH sont chacun de 90°, et l'angle BAC, ou son égal GAH a pour mesure l'arc GH ; d'où il suit que le côté DF du nouveau triangle est supplément de l'angle en A qui lui est opposé dans le triangle BAC. On démontrera de même que les côtés EF et DE sont respectivement suppléments des angles B et C du même triangle BAC. Donc les côtés du nouveau triangle sont suppléments des angles du premier. C. Q. F. 2°. D.

THÉORÊME IV.

566. *Dans un triangle sphérique quelconque BAC, les sinus des angles sont entre eux, comme ceux des côtés qui leur sont opposés ; et réciproquement, les sinus des côtés sont entre eux, comme ceux des angles qui leur sont opposés,* (fig. 3).

DÉMONSTRATION.

Soit un triangle sphérique quelconque BAC, formé de trois secteurs circulaires BGA, BGC et AGC appartenants à autant de grands cercles d'une même sphere dont le centre est en G. Du sommet A de l'un des angles du triangle sphérique, soit abaissée la ligne AD perpendiculaire au plan du secteur BGC, et du même point A, soient aussi menées les droites AL, AK perpendiculaires aux rayons GB, GC. Enfin soient tirées les lignes DL, DK. Cette construction bien entendue, il est évident que les lignes AL, AK sont le sinus des côtés AB, AC; et que les angles ALD, AKD sont respectivement égaux à ceux ABC et ACB du triangle sphérique BAC; puisqu'ils sont formés par des lignes perpendiculaires aux communes sections BG, CG des plans qui forment ces mêmes angles.

Cela posé, les triangles ADK et ADL étant rectangles en D, à cause de la ligne AD perpendiculaire au plan du triangle BGC; donneront *sin.* ALD : R : : AD : AL et R : *sin.* AKD : : AK : AD; donc, en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura *sin.* ALD ou *sin.* ABC : *sin.* AKD, ou *sin.* ACB : : AL ou *sin.* AB : AK ou *sin.* AC. Donc, *dans tout triangle sphérique, rectangle ou obliquangle, les sinus des angles sont entre eux, comme les sinus des côtés qui leur sont opposés; et réciproquement.* C. Q. F. D.

§. II.

De la résolution des Triangles sphériques rectangles.

Préparation au théorême suivant.

567. Soit une pyramide (*fig.* 4) GBPQ, composée de quatre triangles rectangles GBP, GBQ, GPQ et BPQ. Du sommet G de la pyramide, comme centre et du rayon GB soient décrits trois arcs de grand cercle BA, BC et AC, qui formeront un triangle sphérique BAC, rectangle en A; puisque la ligne PQ, commune section des plans GPQ et BPQ, est perpendiculaire au plan du secteur AGB; comme il suit nécessairement de ce que les triangles GPQ et BPQ sont supposés rectangles en P. Si du point A, extrémité de l'arc AB, on mene la ligne AH perpendiculaire sur GB, et encore du point C les lignes CL, CK aussi perpendiculaires aux rayons GB, GA; il est visible que AH et GH; CL et GL, CK et GK seront respectivement égales aux sinus et cosinus des arcs AB, BC et AC du triangle sphérique BAC.

Cette construction supposée, si l'on prend le rayon GB de la sphere pour unité, il sera facile de construire la table suivante pour toutes les parties du triangle sphérique BAC; pourvu que l'on se rappelle que la tangente a pour son expression $\frac{sin.}{cos.}$, que celle de la co-tangente est $\frac{cos.}{sin.}$; et quant à la valeur des sinus des angles, que

dans un triangle quelconque *les sinus des angles sont entre eux, comme les sinus des côtés opposés ;* et enfin que le co-sinus d'un arc est égal à la racine quarrée de la différence entre le quarré du rayon et le quarré du sinus. On aura donc :

1°. L'arc BC ou l'angle QGB,	a pour sinus	$\frac{BQ}{GQ}$	$\frac{1}{GQ}$	$\frac{BQ}{1}$
2°. L'arc AB ou l'angle BGP,		$\frac{BP}{GP}$	$\frac{1}{GP}$	$\frac{BP}{1}$
3°. L'arc AC ou l'angle PGQ,		$\frac{PQ}{GQ}$ pour cos.	GP pour $\frac{GP}{GQ}$ tang.	$\frac{PQ}{GP}$
4°. L'angle ABC ou PBQ,		$\frac{PQ}{BQ}$	$\frac{BP}{BQ}$	$\frac{PQ}{BP}$
5°. L'angle ACB,		$\frac{BP \times GQ}{BQ \times GP}$	$\frac{PQ}{GP \times BQ}$	$\frac{BP \times GQ}{PQ}$

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer toutes les expressions renfermées dans cette table, il suffira de faire voir comment on a trouvé les valeurs de la premiere ligne et de la derniere. Les triangles GQB et GCL étant semblables, donnent GQ : BQ :: GC ou 1 : GL $= \frac{BQ}{GQ} =$ *sin.* BC. Les mêmes triangles donnent encore GQ : GB :: GC : GL $= \frac{1}{GQ} =$ *cos.* BC ; à cause que les lignes GB, GC sont égales au rayon de la sphere. Donc la tangente de l'arc BC a pour expression $\frac{BQ}{1}$, et sa co-tangente $= \frac{1}{BQ}$; ce qui suit de ce que toute tangente est égale au sinus divisé par le co-sinus.

Les triangles GPB, GAH ont donné, par la

comparaison de leurs côtés homologues, les valeurs de la seconde ligne ; les triangles GQP, GCK ont donné de la même manière, les valeurs de la troisième ligne ; le triangle BPQ a donné la quatrième ligne. Enfin l'on a trouvé la valeur du sinus de l'angle C, parceque les sinus des angles sont entre eux comme les sinus des côtés. A l'égard du co-sinus du même angle, on a d'abord

$$cos.^2C = RR - \frac{\overline{BP}^2 \times \overline{GQ}^2}{\overline{BQ}^2 \times \overline{GP}^2} = \frac{\overline{BQ}^2 \times \overline{GP}^2 - \overline{BP}^2 \times \overline{GQ}^2}{\overline{BQ}^2 \times \overline{GP}^2}$$, ce qui s'est réduit à $\frac{QP}{GP \times BQ}$, en mettant à la place de $\overline{GP}^2$ et de $\overline{GQ}^2$ leurs valeurs respectives $\overline{BP}^2 \times \overline{BG}^2$ et $\overline{BG}^2 \times \overline{BQ}^2$; d'où l'on a tiré sur le champ la valeur de la tangente de l'angle C, comme celle de la co-tangente du même angle.

DÉFINITIONS.

568. Lorsque les trois parties d'un triangle sphérique BAC rectangle en A sont tellement disposées, que deux d'entre elles touchent immédiatement la troisième, ou n'en sont séparées que par l'angle droit ; ces deux parties seront nommées *adjacentes* à la troisième que nous appellerons partie *moyenne*, (*fig.* 4).

Lorsque trois parties du même triangle sont tellement disposées, qu'entre celle que nous regarderons toujours comme partie moyenne, et chacune des deux autres, il y ait une autre partie du même triangle interposée (excepté l'angle droit) ; ces deux parties seront nommées

parties *séparées* ou *opposées*, d'où l'on a déduit la table suivante :

Si les parties moyennes sont	AB AC BC B C	Les adjacentes seront	AC et B AB et C B et C AB et BC AC et BC	Et les parties séparées seront	BC et C BC et B AC et AB AC et C AB et B

THÉORÈME GÉNÉRAL.

Pour la résolution de tous les cas possibles des Triangles sphériques rectangles.

569. *Dans un triangle sphérique rectangle en A* (fig. 4), *si l'on substitue aux côtés de l'angle droit les compléments de ces mêmes côtés ; on aura, dans tous les cas, le produit du sinus total par le co-sinus de la partie moyenne égal au rectangle des co-tangentes des parties adjacentes, ou à celui des sinus des parties séparées.*

DÉMONSTRATION.

Pour établir la vérité de ce théorême dans toutes ses parties, il suffit de prendre tel cas particulier que l'on voudra ; et de chercher dans la table donnée au n° précédent, les valeurs convenables à ces mêmes parties ; et l'on trouvera toujours une égalité parfaite.

Prenons pour exemple le cas où l'hypoténuse BC seroit considérée comme partie moyenne, les adjacentes seront B et C, et les parties séparées seront AB et AC ; parcequ'en effet ces côtés sont séparés de la partie moyenne par les angles B et C

posés entre la base et chacun de ces côtés. Le co-sinus de BC est égal à $\frac{1}{GQ}$; cette quantité multipliée par le rayon pris pour unité sera toujours $\frac{1}{GQ}$; la co-tangente de l'angle B est égale à $\frac{BP}{PQ}$ qui multipliée par $\frac{PQ}{BP \times GQ}$ co-tangente de l'angle C donne au produit $\frac{1}{GQ}$. Pareillement le produit du sinus total pour le co-sinus de la partie moyenne, sera encore égal au produit des sinus des parties séparées, en prenant pour côtés les compléments de ces côtés. En effet le co-sinus de $AB = \frac{1}{GP}$, et le co-sinus de $AC = \frac{GP}{GQ}$; dont le produit par le premier est encore égal à $\frac{1}{GQ}$. On vérifiera de la même maniere, tous les cas du théorême ; d'où suit la vérité de cette proposition qui contient la résolution de tous les cas des triangles sphériques rectangles. C. Q. F. D.

C'est au celebre *Neper*, si connu par la découverte des logarithmes, que l'on est redevable de cette proposition singulièrement utile pour la résolution de tous les cas des triangles sphériques rectangles ; et par laquelle on peut se passer d'une table pour le même objet. Nous la joindrons néanmoins ici, afin de rendre ce traité aussi complet qu'il est possible.

De la valeur des angles d'un triangle sphérique rectangle, eu égard à celle des côtés qui comprennent l'angle droit.

THÉORÈME GÉNÉRAL.

570. *Dans un triangle sphérique rectangle quelconque ; 1°. les angles sur l'hypoténuse sont de même espece que les côtés opposés ; 2°. l'hypoténuse est moindre, ou plus grande que* 90°, *suivant que les côtés de l'angle droit sont de même ou de différente espece ; c'est-à-dire que l'hypoténuse sera moindre que* 90°, *si les côtés de l'angle droit sont tous deux plus petits, ou deux plus grands que* 90° ; *et que la même hypoténuse sera plus grande que* 90°, *si l'un des côtés est moindre, et si l'autre est plus grand que* 90°.

DÉMONSTRATION.

Soit le triangle sphérique BAC (*fig.* 5) rectangle en A ; et soient prolongés les côtés AB, AC de l'angle droit, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau en *a*, pour former un nouveau triangle sphérique B*a*C aussi rectangle en *a*. Soient encore pris sur les côtés AC, AB les arcs AD, AF chacun de 90° ; les points D, F seront les poles des arcs AB*a*, AD*a* ; enfin soient tirés les arcs DF, DB et CF.

Cette construction bien entendue, il est visi-

ble que les angles DFA, DBA et DCF sont droits (n° 560); donc, en supposant d'abord les côtés AB, AC plus petits que 90°, les angles ABC et ACB sont aussi moindres que 90°, puisque pour avoir ces mêmes angles, il faut retrancher des angles droits ABD et ACF les angles DBC et BCF. Si l'on suppose que les côtés *a*B, *a*C de l'angle droit B*a*C, soient chacun plus grands que 90°; il n'est pas moins évident que pour avoir les angles *a*BC et *a*CB, il faut ajouter les mêmes angles DBC et FCB aux angles droits *a*BD et *a*CF; donc, 1°. les angles sur l'hypoténuse sont de même espece que les côtés opposés C. Q. F. 1°. D.

2°. Au triangle sphérique obliquangle DCB, à cause que le plus grand angle est opposé au plus grand côté, et le plus petit angle au plus petit côté, il est visible que BC opposé à l'angle aigu BDC mesuré par l'arc AB moindre que 90°, par hypothese, est plus petit que le côté BD opposé à l'angle BCD démontré obtus. Mais l'arc BD est de 90°, à cause que D est le pole de l'arc ABC; donc BC est moindre que 90°, soit qu'on considere le triangle BAC, soit que l'on prenne le triangle B*a*C. Donc l'hypoténuse est moindre que 90°, lorsque les deux côtés de l'angle droit sont tous les deux moindres ou tous deux plus grands que 90°. Enfin, dans le cas où l'un des côtés de l'angle droit est plus petit et l'autre plus grand que 90°; ayant pris le côté Ab plus grand que 90°, et tiré l'arc bC; au triangle sphérique obliquangle bCF, le côté bC opposé à l'angle obtus bFC sera plus grand que le côté CF op-

posé à l'angle AbC évidemment aigu, puisqu'il est égal à l'angle droit DbA moins l'angle DbC ; mais l'arc FC est de 90°, à cause que le point F est le pole de l'arc AD*a* ; donc l'hypoténuse bC est plus grande que 90° ; soit que l'on considere le triangle bAC, soit qu'on l'attribue au triangle b*a*C, dans chacun desquels les deux côtés de l'angle droit sont l'un aigu et l'autre obtus. *Donc l'hypoténuse est moindre ou plus grande que* 90°, *selon que les côtés de l'angle droit sont de même ou de différente espece*, C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE.

571. Il suit du théorême présent que si les angles sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle, sont tous deux aigus ou tous deux obtus, les côtés de l'angle droit sont aussi tous deux plus petits, ou tous deux plus grands que 90° ; et que si l'hypoténuse est moindre ou plus grande que 90°, les côtés de l'angle droit sont tous deux de même espece, ou l'un aigu et l'autre obtus. Cette proposition est le réciproque du théorême que nous venons de démontrer.

OBSERVATION.

Dans toutes les tables pour la résolution des différents cas des triangles sphériques rectangles, il y en a un dans lequel les parties du triangle à résoudre, restent indéterminées, et sont affectées du mot *douteux*. Nous allons montrer à quoi cela tient, afin de ne rien laisser à desirer sur cette partie.

Soit donc un triangle sphérique BAC, rectan-

gle en A (*fig.* 6), soient prolongés les côtés AB de l'angle droit, et l'hypoténuse BC, jusqu'à ce qu'ils se coupent de nouveau en b. Il est évident que le côté AC appartient également au triangle ABC et au triangle AbC, dans lesquels les angles ABC et AbC opposés au côté commun AC sont égaux; mais dans l'un, l'hypoténuse BC est moindre que 90°, et dans l'autre, l'hypoténuse bC est plus grande. Dans le premier, AB est plus petit que 90°, et dans le second, le côté Ab est plus grand. Enfin l'angle ACB du premier est aigu, et l'angle ACb du second est obtus. On voit donc que si l'on donne dans un triangle rectangle, un angle et le côté opposé; les trois autres parties, savoir l'hypoténuse, l'autre angle et le troisieme côté restent douteuses. Malgré cela, dans les calculs astronomiques il n'y a jamais d'équivoque, parceque l'on sait toujours si la partie que l'on cherche est moindre ou plus grande que 90°, attendu que les conditions du problême à résoudre fixent le cas qui doit avoir lieu.

§. III.

572. *De la résolution des triangles sphériques obliquangles.*

DÉFINITIONS.

Soit un triangle sphérique quelconque BAC, (*fig.* 7) et de l'un de ses angles, comme A soit abaissée sur le côté opposé BC la perpendiculaire AD, qui tombera au-dedans du triangle, si

les angles sur la base sont de même espece, ou au dehors si l'un est aigu et l'autre obtus. 1°. *Les angles* BAD, CAD *que forment les côtés de l'angle* BAC *avec la perpendiculaire* AD *seront nommés les segments de l'angle vertical;* 2°. Les parties BD et DC, qui expriment les distances des points B et C à la perpendiculaire AD, seront nommées *les segments de la base.* 3°. Si l'on considere les segments BAD, CAD de l'angle vertical, comme un terme moyen; les côtés AB, AC seront nommés *parties adjacentes;* parcequ'en effet elles touchent immédiatement ces mêmes angles; et les angles B et C sur la base Bc, seront nommés parties *opposées* ou *séparées.* 4°. Enfin, si l'on prend chacun des segments BD, CD de la base pour *partie moyenne*, les angles B et C seront *les parties adjacentes*, parcequ'en effet elles tiennent immédiatement à ces mêmes segments; et les côtés AB, AC seront les parties *opposées ou séparées* à l'égard des mêmes segments. Cela supposé, nous allons établir le théorême suivant, duquel dépend en grande partie la résolution des triangles sphériques obliquangles.

THÉORÊME GÉNÉRAL.

573. *Supposant toutes choses, comme elles ont été établies dans les définitions précédentes;* on aura 1°. *les sinus des segments de l'angle vertical, comme les co-sinus des parties séparées; et les co-sinus des mêmes segments, comme les co-tangentes des parties adjacentes.*

2°. *Les sinus des segments de la base, comme les co-tangentes des parties adjacentes; et les co-sinus des mêmes segments, comme les co-sinus des parties séparées.*

Nous avons à prouver,

1°. que *sin.* BAD : *sin.* CAD : : *cos.* B : *cos.* C.
2°. que *cos.* BAD : *cos.* CAD : : *cot.* AB : *cot.* AC.
3°. que *sin.* BD : *sin.* CD : : *cot.* B : *cot.* C.
4°. que *cos.* BD : *cos.* CD : : *cos.* AB : *cos.* AC.

DÉMONSTRATION.

Au triangle BAD, regardant l'angle en B, comme partie moyenne, le côté AD et l'angle BAD seront les parties opposées ou séparées; et l'on aura par le théorême de *Neper*, R × *cos.* B = *sin.* BAD × *cos.* AD, ou R : *cos.* AD : : *sin.* BAD : *cos.* B. Et par le même théorême le triangle CAD, donnera par la même raison R : *cos.* AD : : *sin.* CAD : *cos.* C. Donc, puisque ces deux proportions ont le même premier rapport, les derniers sont aussi égaux, et donnent *sin.* BAD : *cos.* B : : *sin.* CAD : *cos.* C, ou *sin.* BAD : *sin.* CAD : : *cos.* B : *cos.* C . . . . C. Q. F. 1°. D.

De même encore au même triangle BAD, regardant l'angle BAD comme partie moyenne, les parties adjacentes seront AB et AD; on aura donc par le théorême de *Neper*, R × *cos.* BAD = *tang.* AD × *cot.* AB; ou, ce qui revient au même R : *tang.* AD : : *cot.* AB : *cos.* BAD; le triangle CAD donne aussi par la même raison R : *tang.*

tang. AD : : *cos.* AC : *cos.* CAD ; donc *cos.* AB : *cos.* BAD : : *cos.* AC *cos.* : CAD, ou *alternando* et *invertendo cos.* BAD : *cos.* CAD : : *cot.* AB : *cot.* AC. C. Q. F. 2°. D.

Considérons encore au triangle rectangle BDA, le segment BD comme partie moyenne ; la perpendiculaire AD et l'angle B seront parties adjacentes ; et par le théorême général, on aura R × *sin.* BD = *cot.* B × *tang.* AD ; ou R : *tang.* AD : : *cot.* B : *sin.* BD. Par les mêmes raisons, le triangle CAD donnera R : *tang.* AD : : *cot.* C : *sin.* CD. Donc *sin.* BD : *sin.* CD : : *ot.* B : *cot.* C. C. Q. F. 3°. D.

Enfin prenant AB et AC pour *parties moyennes*, aux mêmes triangles BAD et CAD la perpendiculaire AD, et les segments BD et DC de la base seront des *parties opposées ou séparées ;* on aura donc R × *cos.* AB = *cos.* AD × *cos.* BD ; et R × *cos.* AC = *cos.* AD × *cos.* CD ou bien en mettant ces égalités en proportion, R : *cos.* AD : : *cos.* BD : *cos.* AB, et R : *cos.* AD : : *cos.* CD : *cos.* AC ; d'où l'on tire sur le champ, *cos.* BD : *cos.* CD : : *cos.* AB : *cos.* AC ; c'est-à-dire que *les co-sinus des segments de la base sont comme les co-sinus des côtés* AB et AC, qui en sont séparés par les angles ABD et ACD. C. Q. F. 4°. D.

Ce théorême qui complette la théorie de *Neper* est dû à M. *Pingré*, astronome des plus distingué de l'académie royale des sciences.

Préparation au théorême suivant.

574. Soit un triangle sphérique quelconque

BAC (*fig.* 8), dont les trois côtés AB, AC et BC sont supposés connus. Concevant que l'on ait tracé le cercle entier CAQ, dont l'arc AC est un des côtés du triangle BAC ; soit prolongé l'autre côté AB de l'angle BAC indéfiniment, et sur le même côté ainsi prolongé, soient pris 1°. l'arc AD = AC, 2°. les arcs BF et DG chacun égal au côté BC opposé à l'angle BAC. Soient tirées les cordes DF, BG ; puis ayant encore pris sur le côté AC l'arc AE = AB ; soient menées les cordes BE et DC, ainsi que les arcs de grands cercles qui passent par les points B, E ; D, C, et par le centre de la sphere. Concevons enfin deux circonférences de cercle qui passent par les trois angles du triangle BGE, et par ceux du triangle FBC ; avec une tangente B*o* au point B de l'une des circonférences dont nous venons de parler.

Cette construction bien entendue ; à cause des arcs égaux AB, AE et des arcs AD, AC aussi égaux, les cordes BE, CD ; BG, DF seront paralleles ; d'où il suit que les plans des triangles GBE, FDC seront aussi paralleles, et que ces triangles ont les angles GBE, FDC égaux entre eux ; comme formés par des lignes GB, BE, DF et DC respectivement paralleles deux à deux. Revenons à la considération du cercle que nous avons fait passer par les points F, B, C, auquel nous avons mené par le point B la tangente B*o* ; cette ligne sera parallele à la ligne FC, à cause des arcs égaux BF et BC dont les cordes sont aussi égales ; d'où il suit que l'angle DFC est égal à l'angle GB*o* ; puisque ces angles sont formés par des lignes BG, DF ; B*o* et CF respectivement

paralleles. Si l'on se rappelle encore que deux plans paralleles coupés par un troisieme, donnent des sections paralleles ; on verra que la tangente Bo parallele à FC est la commune section du plan du cercle qui passe par les trois points G, B, E, et de celui qui passe par les trois points du cercle FBC ; donc puisque toute tangente est dans le plan du cercle qu'elle touche, la ligne Bo sera dans le plan du cercle GBE ; d'ailleurs, elle est aussi dans celui du cercle FBC ; et parceque le point B est commun à ces deux cercles, la ligne Bo sera la commune section des plans FBC et GBE, et en même temps la tangente commune au même point B de ces deux circonférences : mais l'angle BFC du segment est égal à l'angle GBo formé par la corde BG et par la tangente. On voit donc que les triangles BEG et DFC sont semblables, puisque ces deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun. Ainsi leurs côtés homologues seront proportionnels, et nous pourrons nous en servir pour former des proportions, quand nous le jugerons à propos.

Corollaire I.

575. Il suit de notre construction que si l'on divise les arcs DF et BG en deux parties égales par la droite MNP, les lignes DN et BP seront les sinus des arcs DM et BM moitiés des mêmes arcs. Il suit aussi qu'à cause des arcs AB, AE, AD, AC respectivement égaux ; si l'on tire l'arc ALK perpendiculaire aux arcs BE, DC ; il divisera les mêmes arcs en deux parties égales,

et si des point L, K on mene les lignes LI, KH perpendiculaires aux cordes BE, DC les lignes BI, DH seront les sinus des arcs BL, DK, moitiés des arcs ELB, CKD.

COROLLAIRE II.

576. Il suit encore de notre construction que l'on aura $DM = \frac{AB+AC+BC}{2} - AC$, et $BM = \frac{AB+AC+BC}{2} - AB$. Car $DF = AB + BF - AC = AB + BC - AC$; puisque l'on a fait $BF = BC$, et $AD = AC$. donc DM, ou $\frac{1}{2}DF = \frac{AB+BC-AC}{2} = \frac{AB+AC+BC}{2} - AC$; de même $BG = AD + DG - AB = AC + BC - AB$; donc BM ou $\frac{BG}{2} = \frac{AC+BC-AB}{2} = \frac{AC+BC+AB}{2} - AB$, puisqu'en réduisant l'entier AB affecté du signe — en fraction, on retrouve la même expression.

COROLLAIRE III.

577. Les triangles DFC et BEG, ayant été démontrés semblables (n° 578) donneront BG : BE : : DC : DF, ou en prenant les moitiés de ces lignes BP : BI : : DH : DN; donc $BP \times DN = DH \times BI$, ou *sin.* $\left(\frac{AB+AC+BC}{2} - AB\right) \times$ *sin.* $\left(\frac{AB+AC+BC}{2} - AC\right) =$ *sin.* BL × *sin.* DK.

THÉORÊME

578. *Dans un triangle sphérique quelconque BAC, dont on connoît les trois côtés, on aura*

cette proportion ; le produit des sinus des côtés qui comprennent un angle quelconque, est au produit des sinus des différences de chacun de ces côtés à la demi-somme des trois côtés ; comme le quarré du rayon, est au quarré du sinus de la moitié de l'angle compris entre ces côtés.

DÉMONSTRATION.

Au triangle sphérique rectangle ALB, on aura R : *sin.* AB : : *sin.* BAL ou *sin.* $\frac{1}{2}$ BAC : BI. Pareillement au triangle AKD aussi rectangle en K, on a R : *sin.* AD ou *sin.* AC : : *sin.* BAK ou *sin.* $\frac{1}{2}$ BAC : DH ; donc en multipliant ces deux proportions termes par termes on aura

R^2 : *sin.* AB × *sin.* AC : : *sin.*^{2} $\frac{1}{2}$ BAC : BI × DH ou *sin.* BL × *sin.* DK ; mais on a fait voir au dernier corollaire que *sin.* BL × *sin.* DK = *sin.* $\left(\frac{AB+AC+BC}{2}-AB\right)\times$ *sin.* $\left(\frac{AB+AC+BC}{2}-AC\right)$. Donc en substituant cette valeur du dernier produit, on aura *sin.* AB × *sin.* AC : *sin.* $\left(\frac{AB+AC+BC}{2}-AC\right)\times$ *sin.* $\left(\frac{AB+AC+BC}{2}-AC\right)$: : RR : *sin.*^{2} $\frac{1}{2}$ BAC. . . . . C. Q. F. D.

Ces théorêmes bien entendus, il n'y aura aucune difficulté à résoudre tous les cas des triangles sphériques obliquangles, comme on va le voir dans les problêmes suivans.

PROBLÊME I.

579. *Connoissant dans un triangle sphérique deux côtés, et l'un des angles opposés ; trouver toutes les parties de ce triangle.* (fig. 7.)

SOLUTION.

Soient AB et AC les côtés donnés avec l'angle B opposé au côté AC. 1°. Pour avoir l'angle C, on fera *sin.* AC : *sin.* B : : *sin.* AB : *sin.* C ; 2°. ayant abaissé du troisieme angle une perpendiculaire AD au côté BC, dans le triangle rectangle BDA on connoît le côté AB et l'angle B, donc on aura le segment BD par cette proportion R : *cos.* B : : *tang.* AB : *tang.* BD. Ayant déterminé le segment BD, on aura le segment CD par la proportion *cos.* AB : *cos.* AC : : *cos.* BD : *cos.* CD. Et prenant la somme ou la différence des segments BD et CD, suivant que la perpendiculaire tombe au-dedans ou au-dehors du triangle, on aura le troisieme côté BC, avec lequel on calculera le troisieme angle BAC par la proportion entre les sinus des angles et ceux des côtés qui leur sont opposés. C. Q. F. T. et D.

PROBLÊME II.

580. *Connoissant dans un triangle deux angles, et l'un des côtés opposés ; trouver toutes les autres parties du triangle.* (fig. 7).

SOLUTION.

Soit le triangle BAC, dans lequel on connoît les angles B et C, avec le côté AB opposé à l'angle C ; 1°. on cherchera d'abord le côté AC par l'analogie commune *sin.* C : *sin.* AB : : *sin.* B : *sin.* AC ; 2°. ensuite ayant abaissé de l'angle A,

la perpendiculaire AD ; au triangle rectangle BDA on aura R × *cos.* AB = *cot.* B × *cot.* BAD, ou *cot.* B : *cos.* AB : : R : *cot.* BAD ; ensuite par l'article 2 du n° 173, on fera *cot.* AB : *cot.* AC : : *cos.* BAD : *cos.* CAD, et prenant la somme ou la différence des segments BAD et CAD de l'angle vertical, suivant que la perpendiculaire tombe au dedans ou au dehors du triangle, on aura le troisieme angle BAC, avec lequel on calculera le troisieme côté par l'analogie commune. C. Q. F. 3°. T. et D.

PROBLÊME. III.

581. *Connoissant dans un triangle sphérique quelconque ; deux côtés et l'angle compris ; trouver les autres parties du triangle* (fig. 7).

SOLUTION.

Soit le triangle BAC dans lequel on connoît les deux côtés BA et BC avec l'angle B qu'ils comprennent ; on abaissera de l'un des angles inconnus comme A la perpendiculaire AD, ce qui donnera un triangle rectangle BDA, auquel on connoîtra le segment BD, par le théorême général de *Neper*, qui donne cette proportion *cot.* AB : *cos.* B : : R : *tang.* BD. Ôtant l'arc BD du côté connu BC, on aura le segment CD. Pour avoir le côté AC, on fera la proportion *cos.* BD : *cos.* CD : : *cos.* AB : *cos.* AC, démontrée au quatrieme article du n° 573 ; ce qui donnera le troisieme côté AC. Enfin l'on aura les angles en A et en C par l'analogie commune qui établit *les sinus des angles, comme les sinus des côtés opposés.* C. Q. F. T. et D.

PROBLÈME IV.

582. *Connoissant dans un triangle sphérique quelconque, deux angles sur un côté; trouver toutes les autres parties du triangle* (fig. 7).

SOLUTION.

Soit toujours le triangle BAC, auquel on connoît le côté AB, avec les deux angles en A et en B adjacents à ce côté. De l'un des angles donnés comme A, l'on abaissera la perpendiculaire AD au côté inconnu BC; et l'on aura un triangle rectangle BDA, auquel on connoît outre l'angle droit, le côté AB, et l'angle B qui lui est adjacent. Regardant ce côté AB comme partie moyenne, l'angle B et l'angle BAD seront parties adjacentes, et donneront R × *cos.* AB = *cot.* B × *cot.* BAD, ou *cot.* B : *cos.* AB : : R : *cot.* BAD, ce qui fait connoître le premier segment de l'angle vertical; le retranchant de l'angle connu BAC, on aura le second segment CAD; avec ces deux angles BAD, CAD on trouvera le côté AC par la proportion *cos.* BAD : *cos.* CAD : : *cot.* AB : *cot.* AC démontrée au second article du n° 173. Enfin l'on trouvera l'angle C, et le côté BC par l'analogie entre les sinus des angles, et ceux des côtés opposés. C. Q. F. T. et D.

PROBLÈME V.

583. *Connoissant les trois côtés d'un triangle quelconque; trouver un de ses angles.*

SOLUTION.

Ayant fait la demi-somme des trois côtés ; si c'est l'angle A que l'on veut trouver ; on fera la proportion démontrée au n° 578, *sin.* AB $\times$ *sin.* AC : *sin.* $\left(\frac{AB+AC+BC}{2} - AB\right)$ $\times$ *sin.* $\left(\frac{AB+AC+BC}{2} - AC\right)$: : RR : *sin.*$^2\frac{1}{2}$BAC ; et le quatrieme terme donnant la moitié de l'angle cherché, on aura l'angle entier BAC. C. Q. F. T. et D.

PROBLÊME VI.

584. *Connoissant les trois angles d'un triangle sphérique quelconque ; trouver celui que l'on voudra de ses côtés.*

SOLUTION.

Ayant fait un nouveau triangle dont les côtés soient suppléments des angles du triangle donné (par le n° 578) on en calculera les angles qui seront les suppléments des côtés que l'on demande. C. Q. F. T. et D.

§ IV.

De la résolution des triangles sphériques obliquangles, par les analogies de Neper.

Préparation aux Théorêmes suivants.

585. Soient deux arcs quelconques, l'un AM plus grand (*fig.* 9), que nous désignerons par A ;

l'autre AN plus petit que nous nommerons B. Des points M, N extrémités de ces arcs, soient menées aux diametres Aa, Bb perpendiculaires entre eux, et dont le premier passe par l'origine commune A de ces deux arcs, les perpendiculaires MP, NQ; MR, NS à ces mêmes diametres; lesquelles soient prolongées jusqu'à ce qu'elles rencontrent de nouveau la circonférence aux points m, n; K et L. Soient de plus menées les cordes MN, ML; mN. mL auxquelles soient abaissées les perpendiculaires CF, CG; Cf, Cg qui diviseront ces cordes et les arcs quelles soutiennent en deux également. Enfin soient menées par les points N, L les tangentes TNt, VLu, terminées aux rayons perpendiculaires CF, CG; Cf, Cg prolongés autant qu'il sera nécessaire.

Cette construction bien entendue, on verra, 1°. que l'arc Mn = A + B; 2°. que l'arc MN = A — B; 3°. que Hm = *sin.* A + *sin.* B; 4°. que MH = *sin.* A — *sin.* B; 5°. que HL ou Pq = *cos.* B + *cos.* A; 6°. que MH ou PQ = *cos.* B — *cos.* A; 7°. que NT = *tang.* $(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$; 8°. que Nt = *tang.* $(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$; 9°. que MG et CG sont respectivement égales à *cos.* $(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$ et à *sin.* $(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$; 10°. que NF ou MF et CF sont aussi respectivement égales à *sin.* $(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$, et à *cos.* $(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$; 11°. que ML = 2 Cf = 2 *cos.* $(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$; 12°. que mL = 2 CF = 2 *cos.* $(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$. Car l'arc ML = 180° — A — B; donc $\frac{1}{2}$ML = 90° — $\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$B; ou, ce qui revient au même, l'arc MO moitié de ML est complément de l'arc égal à la demi-somme des arcs A et B. Donc MG sinus de l'arc MO est le co-sinus de la

même demi-somme, et par conséquent égal à Cf. De même $mL = 180° + B - A$; donc $\frac{1}{2} mL = 90° - \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B$; c'est-à-dire, que la moitié de l'arc mL est complément de la demi-différence des arcs A et B; et par conséquent Lg ou mg est co-sinus de $\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B$; d'où il suit évidemment que $mL = 2\,CF$, puisque CF est égal au co-sinus du même arc. Tout ceci bien entendu, les théorêmes suivants n'auront aucune difficulté.

THÉORÊME I.

586. *Supposant toutes choses, comme dans la construction précédente, je dis que l'on aura,* 1°. *sin.* $A + sin. B = 2\,sin. (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \times cos. (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$; 2°. que *sin.* $A - sin. B = 2\,cos. (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \times sin. (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$.

DÉMONSTRATION.

Les triangles rectangles mHL et mCf sont semblables, puisqu'ils ont les angles HLm et fCm égaux entre eux, comme ayant pour mesure le même arc *om*; et donnent mH : mL : : mf : mC; ou *sin.* $A + sin. B : 2\,cos. (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B) : : sin. (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) : R$; d'où il suit, en faisant le rayon égal à l'unité, que *sin.* $A + sin. B = 2\,cos. (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B) \times sin. (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B)$. C. Q. F. 1°. D.

2°. A cause des triangles rectangles MHN et Cfm aussi semblables, à raison des angles égaux HMN et fCm, on aura encore MH : MN : : Cf : Cm, ou en substituant à ces lignes leurs valeurs respectives *sin.* $A - sin. B : 2\,sin. (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B) : : cos. (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) : R$; d'où l'on tire *sin.* $A - sin. B$

$= 2\,cos.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B) \times sin.\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$. En faisant toujours le rayon égal à l'unité. C. Q. F. 2°. D.

THÉORÈME II.

687. *Supposant toujours la construction énoncée ci-dessus ; je dis que l'on aura*, 1°. $cos.\,B + cos.\,A = 2\,cos.\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B) \times cos.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$; 2°. $cos.\,B - cos.\,A = 2\,sin.\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B) \times sin.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$.

DÉMONSTRATION.

Les triangles rectangles semblables déja nommés, mHL, NHM et mCf donnent, en comparant leurs côtés homologues HL : mL : : Cf : Cm, ou en substituant à ces lignes leurs valeurs, $cos.\,B + cos.\,A : 2\,cos.\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B) : : cos.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B) : R$; d'où il suit que $cos.\,B + cos.\,A = 2\,cos.\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B) \times cos.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$. C. Q. T. 1°. D.

On a aussi par la comparaison des côtés homologues des triangles NHM et mfC, NH : MN : : mf : Cm, ou $cos.\,B - cos.\,A : 2\,sin.\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B) : : sin.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B) : R$; d'où l'on tire sur le champ $cos.\,B - cos.\,A = 2\,sin.\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B) \times sin.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$. C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE I.

588. La comparaison des triangles mHL et NfC, donne encore mH : HL : : Nf : fC, ou $sin.\,A + sin.\,B : cos.\,A + cos.\,B : : sin.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B) : cos.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$. On a aussi MH :

NH : : Cf : Nf, ou *sin.* A — *sin.* B : *cos.* B — *cos.* A : : *cos.* $(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$: *sin.* $(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$.

COROLLAIRE II.

589. Si l'on divise l'une par l'autre les deux égalités démontrées au théorême premier, on aura $\frac{sin.\,A+sin.\,B}{sin.\,A-sin.\,B}=\frac{2\,sin.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\times cos.\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}{2\,cos.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\times sin.\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}=\frac{tang.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)}{tang.\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}=tang.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\times cot.\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$; en substituant les tangentes des arcs $(\frac{1}{2}A\pm\frac{1}{2}B)$ au lieu des sinus des mêmes arcs divisés par leurs cosinus.

COROLLAIRE III.

590. Pareillement si l'on divise l'une par l'autre les deux équations démontrées au théorême second, on aura $\frac{cos.\,B.+cos.\,A.}{cos.\,B.-cos.\,A.}=\frac{2\,cos.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B.)}{2\,sin.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)}\times\frac{cos.\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}{sin.\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}=\frac{cot.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)}{tang.\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}=cot.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\times cot.\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$.

COROLLAIRE IV.

591. On trouvera de même $\frac{sin.\,A+sin.\,B}{cos.\,A+cos.\,B}=cot.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$; et $\frac{sin.\,A-sin\,B}{cos.\,B-cos.\,A}=cot.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$; et en renversant cette égalité, $\frac{cos.\,B.-cos.\,A}{sin.\,A-sin.\,B}=tang.\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$, ce qui suit d'ailleurs évidemment de la comparaison des triangles semblables *m*HL, NHM et CNT qui donnent

mH : HL : : CN : NT ; et MH : HN : : CN : NT.

SCHOLIE.

592. Il seroit aisé de déduire de cette figure une foule d'autres propositions trigonométriques, en considerant les différents triangles rectangles semblables qu'elle nous présente, et comparant de toutes les manieres possibles les côtés homologues de ces triangles. Par exemple les triangles mHL, CLu étant semblables ainsi que les triangles MHL et CLV, donnneront mH : HL : : CL : Lu, ou *sin.* A + *sin.* B : *cos.* B + *cos.* A : : R : *cot.* ($\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{2}$ B), et MH : HL : : CL : LV, ou *sin.* A — *sin.* B : *cos.* B + *cos.* A : : R : *cot.* ($\frac{1}{2}$ A — $\frac{1}{2}$ B). En général, on pourra découvrir toutes les vérités déja démontrées, par la seule comparaison des côtés correspondants de ces triangles ; et cette méthode sera toujours plus simple et plus facile que celle des substitutions, ou toute autre qui conduiroit au même but.

THÉORÊME III.

593. *Soit arc un mAM que nous désignons toujours par A* (*fig.* 162 *pl. XI*). *Je dis que l'on aura* 1°. 1. + *cos.* $A = 2\ cos.^2 \frac{1}{2} A = sin.\ A \times cot.\ \frac{1}{2} A$; 2°. *que* 1 — *cos.* $A = 2\ sin.^2 \frac{1}{2} A = sin.\ A \times tang.\ \frac{1}{2} A$.

DÉMONSTRATION.

Ayant tiré par l'extrémité B du diametre AB

et celle M de l'arc AM, la corde BM terminée au prolongement de la tangente en A, et menées par le centre les droitres CK et CL, perpendiculaires aux cordes AM et BM; il est visible que AT sera double de AK, et que BM sera double de CQ, il est aussi évident que AK sera la tangent de la moitié de l'arc AM, et que ML ou CQ seront le co-sinus de la moitié du même arc.

Cela posé, les triangles BLC et BPM rectangles et semblables donneront BC : BL : : BM ou 2 BL : BP; donc $BP = \frac{2\,BL^2}{BC}$, ou bien $1 + cos.A = 2\,cos.^2 \frac{1}{2}A$; de plus, à cause des triangles semblables MPA et BAT, on a aussi BP : PM : : AB : AT, ou $1 + cos.\ A : sin.\ A : : 2R : 2\,tang.\ \frac{1}{2}A : : R : tang.\ \frac{1}{2}A$; donc $1 + cos.A = \frac{sin.\ A}{tang.\frac{1}{2}A} = sin.\ A \times cot.\ \frac{1}{2}A = 2\,cos.\ \frac{1}{2}A$, à cause de la premiere expression de la même ligne BP. C. Q. F. 1°D. De même, à cause des triangles semblables CLB et APM, on aura CB : CL :: AM ou 2 CL : AP $= \frac{2\,CL^2}{CB}$, ou $1 - cos.A = 2\,sin.^2 \frac{1}{2}A$; mais à cause des triangles MPA et BAT déjà dénommés, on a PM : AP : : AB : AT, ou $sin.\ A : 1 - cos.\ A : : R : tang.\ \frac{1}{2}A$; donc $1 - cos.A = sin.A \times tang.\ \frac{1}{2}A = 2\,sin.^2 \frac{1}{2}A$, à cause de la premiere valeur de la ligne AP. C. Q. F. 2°. D.

Démonstration des Théorêmes de Neper.

THÉORÊME I.

594. *Dans un triangle sphérique quelconque BAC, (plan. XI, n°. 2. fig. 7.) si d'un angle A on abaisse une perpendiculaire AD sur le côté opposé BC, soit que cette perpendiculaire tombe au-dedans, soit qu'elle tombe au-dehors du même triangle; je dis que l'on aura toujours cette analogie, sin.* (AB + AC) : *sin.* (AB — AC) : : *cot.* $\frac{1}{2}$BAC : *tang.* ($\frac{1}{2}$BAD — $\frac{1}{2}$CAD).

DÉMONSTRATION.

Par le théorême général du n° 173 pour tous les triangles sphériques quelconques, on a *cot.* AB : *cot.* AC : : *cos.* BAD : *cos.* CAD, ou parce que les tangentes sont en raison inverse des co-tangentes, *tang.* AB. : *tang.* AC : *cos.* CAD : *cos.* BAD, donc *addendo.* et *detrahendo*, *tang.* AB + *tang.* AC : *tang.* AB — *tang.* AC : : *cos.* CAD + *cos.* BAD : *cos.* CAD — *cos.* BAD; mais (par le n° 518) *tang.* AB + *tang.* AC : *tang.* AB — *tang.* AC : : *sin.* (AB + AC) : *sin.* (AB — AC); (et par le n° 590) *cos.* CAD + *cos.* BAD : *cos.* CAD — *cos.* BAD : : *cot.* ($\frac{1}{2}$BAD + $\frac{1}{2}$CAD); *tang.* ($\frac{1}{2}$BAD — $\frac{1}{2}$CAD). Or, lorsque la perpendiculaire AD tombe au-dedans du triangle, $\frac{1}{2}$BAD + $\frac{1}{2}$CAD = $\frac{1}{2}$BAC; et la proportion devient *sin.* (AB + AC) : *sin.* (AB — AC) : : *cot.* $\frac{1}{2}$BAC : *tang.* ($\frac{1}{2}$BAD — $\frac{1}{2}$CAD). Si la perpendiculaire tombe au-dehors du triangle le

gle le dernier rapport de notre derniere proportion peut aisément se changer en celui-ci : *cot.* $(\frac{1}{2}BAD - \frac{1}{2}CAD) : tang. (\frac{1}{2}BAD + \frac{1}{2}CAD)$; mais alors $\frac{1}{2}BAD - \frac{1}{2}CAD = \frac{1}{2}BAC$, et le dernier terme est la tangente de la demi-somme des angles BAD et CAD. Donc, en général, dans un triangle sphérique quelconque, on aura cette proportion, le *sinus de la somme des côtés qui renferment un angle, est au sinus de la différence des mêmes côtés ; comme la co-tangente de demi-angle compris entre ces côtés, est à la tangente de la demi-différence ou de la demi-somme des angles formés par la perpendiculaire abaissée de l'angle donné sur le côté opposé à l'angle donné ;* suivant que cette perpendiculaire tombe au-dedans ou au-dehors du triangle donné. C. Q. F. D.

Premier Scholie.

595. On voit que cette proposition sert à résoudre un triangle sphérique quelconque, dans lequel on connoît deux côtés et l'angle compris entre ces côtés : car au moyen de cette analogie, on décomposera le triangle proposé en deux triangles rectangles BAD, CAD, dans chacun desquels, outre l'angle droit et un angle, on connoît encore l'hypoténuse. Donc, on pourra trouver chacun des angles B et C sur la base avec les segments BD et CD, dont la somme ou la différence donnera le troisieme côté ; suivant que la perpendiculaire tombe au-dedans ou au-dehors.

SECOND SCHOLIE.

596. Si le triangle est rectiligne, *sin.* (AB+AC) et *sin.* (AB—AC) deviennent égaux à la somme et à la différence des côtés ; on aura donc cette proportion pour tout triangle rectiligne, dans lequel on connoît deux côtés et l'angle compris : *la somme des deux côtés, est à leur différence ; comme la co-tangente du demi-angle donné, est à la tangente de la demi-différence, ou de la demi-somme des angles formés par une perpendiculaire abaissée de l'angle donné sur le côté opposé* BC. D'où il suit une proposition remarquable, savoir ; que *dans un triangle quelconque* BAC, *auquel on connoît deux côtés* AB, AC, *avec l'angle compris* BAC ; *la demi-différence des angles* BAD, CAD, *formés par la perpendiculaire abaissée sur le côté opposé à l'angle* A est égale à la demi-différence des angles sur la base, lorsque la perpendiculaire tombe au-dedans ; et que *la demi-somme des mêmes angles* BAD *et* CAD *est égale à la demi-somme des angles* B *et* C *sur cette base ;* lorsque la perpendiculaire tombe au-dehors.

COROLLAIRE.

597. Si le triangle BCA devient rectangle en C ; ou, ce qui revient au-même, si le côté AC se confond avec la perpendiculaire AD, ce qui anéantit l'angle CAD ; alors l'angle BAD ou BAC est également la somme ou la différence des angles BAD et CAD ; et la proportion énoncée au théorême sera, *sin.* (AB+AC):

sin. (AB — AC) : : *cot.* $\frac{1}{2}$ BAC : *tang.* $\frac{1}{2}$ BAC : : $\frac{RR}{tang.\frac{1}{2}BAC}$: *tang.* $\frac{1}{2}$BAC : : RR : *tang.*^{2} $\frac{1}{2}$BAC; c'est-à-dire, *le sinus de la somme de l'hypoténuse et d'un côté de l'angle droit, est au sinus de la différence de la même hypoténuse au même côté; comme le quarré du rayon est au quarré de la tangente du demi-angle compris entre ce même côté et l'hypoténuse*; et si le triangle est rectiligne rectangle, la même proportion devient, AB + AC : AB — AC : : RR : *tang.*^{2} $\frac{1}{2}$BAC.

THÉORÈME II.

598. *Dans un triangle sphérique quelconque BAC, on aura cette analogie; le sinus de la somme des angles* B *et* C *sur un côté connu* BC, *est au sinus de leur différence; comme la tangente de la demi-base, est à la tangente de la demi différence ou de la demi somme des segments* BD *et* DC *de la même base, formés par une perpendiculaire abaissée de l'angle opposé à cette base; selon que cette perpendiculaire tombe au-dedans ou au-dehors du même triangle.*

DÉMONSTRATION.

Par l'art.... 3me de la proposition générale pour tous les triangles sphériques obliquangles (du n°. 573.) on a *cot.* B : *cot.* C : : *sin.* BD : *sin.* CD; ou *tang.* C : *tang.* B : : *sin.* BD : *sin.* CD, donc *addendo* et *detrahendo*, *tang.* C. + *tang.* B *tang.* C — *tang.* B : : *sin.* BD + *sin.* CD :

sin. BD — *sin.* CD : mais (par le n°. 518) le premier rapport est égal à celui de *sin.* (C + B) à *sin.* (C — B), et (par le n°. 589) le second rapport est égal à celui de *tang.* ($\frac{1}{2}$BD + $\frac{1}{2}$CD), *tang.* ($\frac{1}{2}$BD — $\frac{1}{2}$CD), ou à celui de *tang.* $\frac{1}{2}$BC *tang.* ($\frac{1}{2}$BD — $\frac{1}{2}$CD) : c'est-à-dire, que dans le cas où la perpendiculaire tombe au-dedans du triangle, on aura la proportion *sin.* (C + B) : *sin.* (C — B) : : *tang.* ($\frac{1}{2}$BC) : *tang.* ($\frac{1}{2}$BD — $\frac{1}{2}$CD). Si la perpendiculaire tombe au-dehors, on fera attention que le dernier rapport de notre proportion peut s'écrire ainsi : : *tang.* ($\frac{1}{2}$BD — $\frac{1}{2}$CD) : *tang* ($\frac{1}{2}$BD + $\frac{1}{2}$CD); mais alors $\frac{1}{2}$BD — $\frac{1}{2}$CD = $\frac{1}{2}$BC : donc alors il faut faire cette analogie : *le sinus de la somme des angles sur une base connue, est au sinus de la différence des mêmes angles; comme la tangente de la demi-base, est à la tangente de la demi-somme des segments*, formés par la perpendiculaire abaissée de l'angle opposé à cette même base; d'où suit la vérité du théorême dans toutes ses parties. C. Q. F. D.

PREMIER SCHOLIE.

599. Il est visible que l'analogie démontrée dans ce théorême sert à résoudre un triangle sphérique obliquangle quelconque, dont on connoît un côté avec les deux angles adjacents à ce même côté. Car, connoissant d'abord le côté BC, qui est la somme ou la différence de des segments BD et DC, formés par une perpendiculaire abaissée de l'angle opposé; il est visible que le dernier terme de cette même

proportion fera connoître la différence, ou la somme des mêmes segments; suivant que cette perpendiculaire tombe au-dedans ou au-dehors du triangle : donc, à chacun des triangles rectangles BDA et CDA, outre l'angle droit et un angle qui sont donnés, on connoîtra chacun des côtés adjacents à l'angle donné; donc on pourra calculer l'hypoténuse et chacun des angles BAD et CAD, dont la somme ou la différence sera le troisieme angle du triangle dans lequel on connoît un côté avec les angles adjacents à ce côté.

SECOND SCHOLIE.

600. Si le triangle est rectiligne, la proportion deviendra celle-ci : *le sinus de la somme des angles donnés sur un côté aussi donné, est au sinus de la différence des mêmes angles; comme la demi-base ou le demi côté-donné est à la demi-différence, ou à la demi-somme des segments formés par la perpendiculaire abaissée de l'angle opposé à la base connue;* suivant que cette perpendiculaire tombe au-dedans ou au-dehors du triangle.

THÉORÊME III.

601. *Soit toujours un triangle sphérique obliquangle quelconque* BAC; *si l'on abaisse d'un quelconque* A *de ses angles une perpendiculaire* AD *au côté opposé* BC; *je dis que l'on aura cette proportion* : cot. $(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B)$:

tang.($\frac{1}{2}$C — $\frac{1}{2}$B) : : *tang.*($\frac{1}{2}$BAD + $\frac{1}{2}$CAD) : *tang.*($\frac{1}{2}$BAD — $\frac{1}{2}$CAD) ou : : *tang.*($\frac{1}{2}$BAD — $\frac{1}{2}$CAD) : *tang.*($\frac{1}{2}$BAD + $\frac{1}{2}$CAD), *si la perpendiculaire tombe au-dehors du triangle.*

DÉMONSTRATION.

Par l'article 1er. du théorême général des triangles sphériques obliquangles, on a, *cos.* B : *cos.* C : : *sin.* BAD : *sin.* CAD ; donc, *addendo* et *detrahendo*, *cos.* B + *cos.* C : *cos.* B — *cos.* C : : *sin.* BAD + *sin.* CAD : *sin.* BAD — *sin.* CAD, donc en substituant à chacun de ces deux rapports leurs égaux (par les n°s. 589 et 590), on aura, *cot.*($\frac{1}{2}$C + $\frac{1}{2}$B) : *tan.*($\frac{1}{2}$C — $\frac{1}{2}$B) : : *tan.*($\frac{1}{2}$BAD + $\frac{1}{2}$CAD) : *tang.*($\frac{1}{2}$BAD — $\frac{1}{2}$CAD) ; d'où suit la vérité du théorême, lorsque la perpendiculaire tombe au-dedans : mais si la perpendiculaire tombe au-dehors du triangle ; ou, ce qui revient au même, si l'angle C est obtus, son co-sinus devient négatif, ce qui renverse les deux termes du premier rapport ; donc, si on veut leur conserver le même ordre, il faudra renverser ceux du second, ce qui donne, *cot.*($\frac{1}{2}$C + $\frac{1}{2}$B) : *tang.*($\frac{1}{2}$C — $\frac{1}{2}$B) : : *tang.*($\frac{1}{2}$BAD — $\frac{1}{2}$CAD) ou *tang.*($\frac{1}{2}$BAC) : *tang.*($\frac{1}{2}$BAD + $\frac{1}{2}$CAD) ; d'où suit la vérité du théorême dans les deux cas. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

602. Ce théorême peut servir à résoudre un triangle sphérique quelconque dont les trois angles sont connus. Car l'angle duquel on

abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé étant donné, comme on le suppose, on voit que l'on connoît la demi-somme, ou la demi-différence des angles BAD et CAD, formés par cette perpendiculaire, suivant qu'elle tombe au-dedans ou au-dehors du triangle. Donc, puisque le quatrieme terme de la proportion démontrée au théorême fait connoître la demi-différence ou la demi-somme des mêmes angles; on connoîtra chacun d'eux en particulier; et par conséquent à chacun des triangles rectangles BDA, CDA, on connoîtra les trois angles; d'où suit la connoissance des côtés AB, AC, et des segments BD, DC, dont la somme ou la différence fera connoître le troisieme côté. On voit donc que, par ce théorême, on peut connoître directement les trois côtés d'un triangle sphérique obliquangle, dont les trois angles sont connus; sans avoir recours à un triangle dont les côtés seroient suppléments des angles donnés du premier, comme cela se fait ordinairement. La même proportion serviroit à connoître les angles des triangles rectangles dans lesquels on pourroit diviser un triangle rectiligne quelconque dont les trois angles sont connus; mais elle ne serviroit en rien à en faire connoître les côtés.

THÉORÊME IV.

603. *Dans un triangle sphérique quelconque* BAC, *la tangente de la demi-somme des côtés, est à la tangente de leur demi-différence; comme*

la tangente de la demi-somme des angles sur la base, est à la tangente de la demi-différence des mêmes angles; ou, ce qui revient au même on aura cette analogie, *tang.*$(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC)$: *tang.*$(\frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AC)$: : *tang.*$(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B)$: *tang.*$(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}B)$.

DÉMONSTATION.

Puisque, dans tout triangle sphérique, les sinus des côtés sont entre eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés, on aura, *sin.*AB : *sin.*AC : : *sin.*C : *sin.*B donc, faisant un *addendo* et un *detrahendo*, *sin.* AB + *sin.*AC : *sin.*AB — *sin.*AC : : *sin.*C + *sin.*B : *sin.*C — *sin.*B : ou, en substituant à chacun de ces rapports leurs égaux (par le n°. 589), *tang.*$(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC)$: *tang.*$(\frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AC)$: : *tang.*$(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B)$: *tang.*$(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}B)$; d'où suit la vérité du théorême. C. Q. F. D.

THÉORÊME V.

604. Dans un triangle sphérique quelconque dont les trois côtés sont connus, on aura toujours cette proportion; *la tangente de la demi-base, est à la tangente de la demi-somme des côtés; comme la tangente de la demi-différence des mêmes côtés, est à la tangente de la demi-différence, ou de la demi-somme des segments formés par une perpendiculaire abaissée de l'angle opposé sur cette base*; c'est-à-dire que l'on aura *tang.* $(\frac{1}{2}BC)$: *tang.* $(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC)$: : *tang.* $(\frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AC)$:

tang.($\frac{1}{2}$BD $\pm$ $\frac{1}{2}$CD), *le signe a* + *lieu quand la perpendiculaire tombe au-dedans; et le signe* — *quand elle tombe au-dehors du triangle.*

Démonstration.

Par l'article 4me. du théorême général des triangles sphériques quelconques (n°. 573), on a, *cos.*AC : *cos.*AB :: *cos.*CD : *cos.*BD; donc, *addendo* et *detrahendo*, *cos.*CA + *cos.*AB : *cos.*AC — *cos.*AB :: *cos.*CD + *cos.*BD : *cos.*CD — *cos.*BD; et à cause de la formule *cos.*B + *cos.*A : *cos.*B — *cos.*A :: *cot.*($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B) : *tang.*($\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$B), démontrée n°. 590); on aura *cot.*($\frac{1}{2}$AB + $\frac{1}{2}$AC) : *tang.*($\frac{1}{2}$AB — $\frac{1}{2}$AC) :: *cot.*($\frac{1}{2}$BD + $\frac{1}{2}$CD) : *tang.*($\frac{1}{2}$BD — $\frac{1}{2}$CD); d'où l'on tire sur le champ, *tang.*($\frac{1}{2}$AB + $\frac{1}{2}$AC) × *tang.*($\frac{1}{2}$AB — $\frac{1}{2}$AC) = *tang.*($\frac{1}{2}$BD + $\frac{1}{2}$CD) × *tang.*($\frac{1}{2}$BD — $\frac{1}{2}$CD); ce qui donne, *tang.*($\frac{1}{2}$BD + $\frac{1}{2}$CD), ou *tang.*($\frac{1}{2}$BC) : *tang.*($\frac{1}{2}$AB + $\frac{1}{2}$AC) :: *tang.*($\frac{1}{2}$AB — $\frac{1}{2}$AC) : *tang.*($\frac{1}{2}$BD — $\frac{1}{2}$CD), pour le cas où la perpendiculaire tombe au-dedans du triangle; et *tang.*($\frac{1}{2}$BD — $\frac{1}{2}$CD) ou *tang.* $\frac{1}{2}$BC : *tang.*($\frac{1}{2}$AB + $\frac{1}{2}$AC) :: *tang.*($\frac{1}{2}$AB — $\frac{1}{2}$AC) : *tang.*($\frac{1}{2}$BD + $\frac{1}{2}$CD), pour celui ou la perpendiculaire tombe au-dehors; d'où suit la vérité du théorême dans ses deux parties. C. Q. F. D.

Scholie.

605. Ce théorême s'est évidemment à résoudre un triangle sphérique quelconque dont les trois côtés sont connus; en le décomposant en

deux triangles rectangles dont on connoîtra l'hypoténuse et un côté de l'angle droit. C'est un des plus beaux théorêmes de *Neper*, et qui rentre sur le champ dans l'analogie semblable pour la résolution d'un triangle rectiligne dont les trois côtés sont connus. La maniere dont ce géometre est parvenu à le démontrer, a de plus une correspondance marquée avec la construction nécessaire à la démonstration de cette proportion sur les triangles rectilignes. On peut la voir dans son ouvrage, qui a pour titre : *Logarithmorum mirifici canonis constructio*; et dans la trigonométrie sphérique de M. *Volf*, notre démonstration est plus simple, mais peut-être beaucoup moins ingénieuse.

THÉORÊME VI.

606. Dans un triangle sphérique quelconque BAC, on aura toujours ces deux proportions : 1°. *Le sinus de la demi-somme des côtés, est au sinus de leur demi-différence, comme la co-tangente du demi-angle compris entre ces côtés, est à la tangente de la demi-différence des angles opposés à ces côtés.* 2°. *Le co-sinus de la demi-somme des côtés, est au co-sinus de leur demi-différence; comme la co-tangente du demi-angle compris entre ces côtés, est à la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés.*

DÉMONSTRATION.

Par le n°. 594, on a $\sin.(AB+AC) : \sin.(AB-AC) :: \cot.\frac{1}{2}BAC : \tang.(\frac{1}{2}BAD - \frac{1}{2}CAD)$;

Par le n°. 603, on a, $tan.(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC) : tan.(\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}AC) :: tang.(\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}B) : tang.(\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}B)$;

Par le n°. 601, on a, $tan.(\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}B)\ tan.(\frac{1}{2}BAD-\frac{1}{2}CAD) :: cot.(\frac{1}{2}BAC) : tan.(\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}B)$;

Donc, en multipliant ces trois proportions par ordre, on aura, $sin.(AB+AC)\times tang.(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC) : sin.(AB-AC)\times tang.(\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}AC) :: cot.^2\frac{1}{2}BAC : tang.^2(\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}B)$; mais par le n°. 593, on a $sin.(AB\pm AC)\times tang.(\frac{1}{2}AB\pm\frac{1}{2}AC)=2\,sin.^2(\frac{1}{2}AB\pm\frac{1}{2}AC)$; donc, en substituant ces quantités à leurs égales dans la derniere proportion après avoir divisé par 2, ou aura en prenant la racine quarrée de chaque terme de la proportion, $sin.(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC) : sin.(\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}AC) :: co\text{-}tang.\frac{1}{2}BAC : tang.(\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}B)$. C. Q. F. 1°. D.

2°. On peut donner aux deux dernieres proportions ci-dessus la forme que l'on voit ci-après, en laissant la premiere telle quelle est absolument, substituant les co-tangentes aux tangentes dans la seconde, et en changeant seulement de place les extrêmes de la derniere, ce qui donne :

1°. $sin.(AB+AC) : sin.(AB-AC) :: cot.\frac{1}{2}BAC : tang.(\frac{1}{2}BAD-\frac{1}{2}CAD)$;

2°. $cot.(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC) : cot.(\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}AC) :: tang.(\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}B) : tang.(\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}B)$;

3°. $tang.(\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}B) : tang.(\frac{1}{2}BAD-\frac{1}{2}CAD) :: cot.\frac{1}{2}BAC : tang.(\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}B)$.

Donc, en multipliant ces trois proportions par ordre après avoir divisé les antécédents par $tang.(\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}B)$, et les conséquents par

tang. ($\frac{1}{2}$BAD — $\frac{1}{2}$CAD) ; on aura *sin.* (AB + AC) × *cot.* ($\frac{1}{2}$AB + $\frac{1}{2}$AC) : *sin.* (AB — AC) × *cot.* ($\frac{1}{2}$ AB — $\frac{1}{2}$AC) :: *cot.*^{2} $\frac{1}{2}$BAC : *tang.*^{2} ($\frac{1}{2}$C + $\frac{1}{2}$B); mais par le n°. 593 , on a , *sin.* (AB ± AC) × *cot.* ($\frac{1}{2}$AB ± $\frac{1}{2}$AC) = 2 *cos.*^{2} ($\frac{1}{2}$AB ± $\frac{1}{2}$AC), donc en substituant ces rapports à leurs égaux après les avoir divisés par deux, et tirant les racines de tous les termes de la nouvelle proportion ; on aura, *cos.* ($\frac{1}{2}$AB + $\frac{1}{2}$AC) : *cos.* ($\frac{1}{2}$AB — $\frac{1}{2}$AC) : : *cot.* $\frac{1}{2}$BAC : *tang.* ($\frac{1}{2}$C + $\frac{1}{2}$B) , d'où suit la vérité de la seconde partie du théorême. C. Q. T. 2°. D.

Premier Scholie.

507. Ce théorême sert évidemment à résoudre un triangle sphérique quelconque BAC, dans lequel on connoît deux côtés et l'angle compris ; car les deux proportions que nous venons de démontrer, donnent en même temps ses deux angles opposés aux côtés donnés ; après quoi il n'y a plus aucune difficulté à trouver le troisieme côté. Si le triangle devient rectiligne , la premiere proportion devient celle donné au n°. 547. de la trigonométrie pour la résolution du même cas dans les triangles rectilines. La seconde proportion devient, ● : ● : : *cot.* $\frac{1}{2}$BAC : *tang.* $\frac{1}{2}$C + $\frac{1}{2}$B ; ce qui est évident, puisque les trois angles d'un triangle rectiligne ne valent que deux droits. Si le triangle sphérique BAC devient rectangle en C, on aura, *sin.* ($\frac{1}{2}$AB + $\frac{1}{2}$AC) : *sin.* ($\frac{1}{2}$AB — $\frac{1}{2}$AC) : : *cot.* $\frac{1}{2}$BAC : *tang.* (45° + $\frac{1}{2}$B) , et *cos.*

$(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC) : cos.(\frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AC) :: cot.\frac{1}{2}BAC : tang.(45° - \frac{1}{2}B)$: ce qui peut servir à faire connoître un des angles sur l'hypoténuse.

Second Scholie.

608. On prouvera avec la même facilité, et par le moyen des articles 594, 601 et 603, différemment combinés que dans tout triangle sphérique obliqu'angle dans lequel on connoît deux angles sur un côté, on a pareillement ces deux analogies.

1°. *Le sinus de la demi-somme des angles sur le côté donné, est au sinus de leur demi-différence; comme la tangente du demi-côté donné, est à la tangente de la demi-différence des côtés opposés à ces angles donnés.*

2°. *Le co-sinus de la demi-somme des angles sur le côté donné, est au co-sinus de leur demi-différence; comme la tangente du demi-côté, est à la tangente de la demi-somme des côtés opposés.*

Si le triangle est rectiligne, ces deux proportions deviendront celle-ci : 1°. *Le sinus de la demi-somme des angles sur un côté connu, est au sinus de leur demi-différence comme la moitié de ce même côté, est à la demi différence des côtés opposés à ces angles.*

2°. *Le co-sinus de la demi-somme des angles, est au co-sinus de leur demi-différence; comme la moitié du côté donné, est à la demi-somme des côtés opposés.* On voit donc comment, avec ces deux analogies on aura à la fois les deux côtés opposés aux angles donnés

par la connoissance de leur demi-somme, et de leur demi-différence.

TROISIEME ET DERNIER SCHOLIE.

609. Il suit de tout ce qui précede, que tous les cas de la trigonométrie sphérique se réduiront à des analogies absolument semblables à celles de la résolution des cas correspondants de la trigonométrie rectiligne ; et c'est une obligation singuliere que l'on a de plus au célebre *Neper*, dont toutes les découvertes sont marquées au coin de la plus grande utilité. On ne peut trop s'étonner que des théories aussi intéressantes aient été presqu'entierement inconnues aux auteurs élémentaires modernes, et que même d'autres aient affecté de les regarder comme peu utiles. J'espere que l'on me saura gré de les avoir démontrées toutes de la maniere la plus simple, et d'avoir complété par cette addition importante la trigonométrie, sans laquelle il est impossible de faire aucune carte en grand avec quelque exactitude. Ceux qui voudront connoître entiérement la trigonométrie sphérique, pourront consulter mes principes d'astronomie sphérique, où ils trouveront les solutions géométriques et algébriques de tous les cas ci-dessus, avec l'application du calcul différentiel, aux formules trigonométriques. Ils trouveront aussi d'excellentes choses dans le traité de M. *Cagnoli*, qui a suivi une marche semblable à celle de l'ouvrage dont je viens de parler.

CHAPITRE VII.

Des instruments dont on fait usage dans la mesure des angles. Des attentions qu'il faut avoir dans leurs déterminations. Des différents obstacles qui peuvent se rencontrer dans la pratique ; de la maniere de les surmonter, et des principales especes de réductions à faire sur les angles observés.

610. LORSQUE l'on veut faire un plan d'une étendue considérable, c'est par des triangles que l'on fixe la position des principaux points de la carte ; et l'on détermine tous les angles et les côtés de ces triangles, soit par des mesures actuelles, soit par des calculs fondés sur les analogies que l'on vient de démontrer. Au premier coup-d'œil rien ne paroît plus facile que l'application des regles de la géométrie à la pratique sur le terrain ; mais lorsqu'on réfléchit sur toutes les causes d'erreurs qui accompagnent nécessairement toutes les opérations, on ne peut apporter trop de précautions pour les diminuer le plus qu'il est possible, pour les distinguer les unes des autres, et pour les corriger, ou les prévenir. Enfin, il faut savoir quelquefois les estimer assez adroitement pour ne pas trop compliquer les détails des opérations. Les grandeurs que l'on mesure sur le terrain, sont de deux especes ; ou des étendues en longueur qui servent de base, aux

triangles que l'on veut établir, ou les angles qui sont formés par des rayons visuels dirigés aux principaux points du plan à lever. Lorsque l'on veut mesurer les bases, il faut choisir autant qu'il est possible le terrain le plus uni et le plus étendu : il faut, si l'on se sert de chaînes, avoir attention de les faire tendre toujours également, et horizontalement ; et ne se servir que de celles que l'on a bien vérifiées avec des mesures bien connues : encore, si les opérations étoient d'une certaine importance, comme s'il s'agissoit de déduire la longueur d'un degré du méridien par une latitude quelconque ; il faudroit rejeter toutes les chaînes dont on fait usage dans la levée des plans et mesurer les différentes bases particulieres, et singulièrement la premiere avec toutes les précautions que messieurs de l'académie royale des sciences ont employé dans la détermination de leur base pour les degrés qu'ils ont mesurés.

Du graphometre, de son usage, et de la maniere de le vérifier.

611. Les angles se mesurent avec la graphometre, ou avec des quart-de-cercles munis de lunettes pour découvrir les objets les plus éloignés. Dans les plans relatifs aux opérations des grands chemins ou autres travaux royaux, la plupart du temps on peut se servir d'un bon graphometre ordinaire pour mesurer les angles, si les côtés des triangles que l'on veut former n'excédent

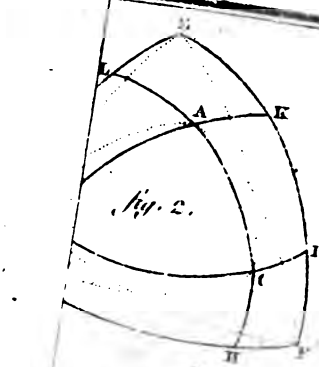


fig. 2.
A
K
I
H

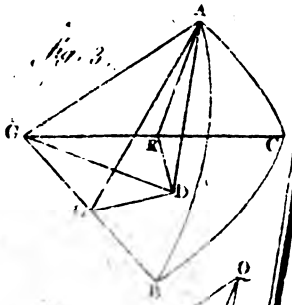


fig. 3.
A
G
K
C
D
B

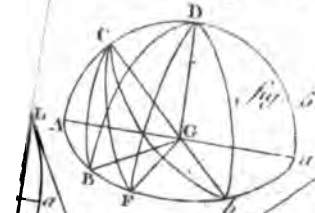


fig. 5.
D
C
A
G
B
F
a
b

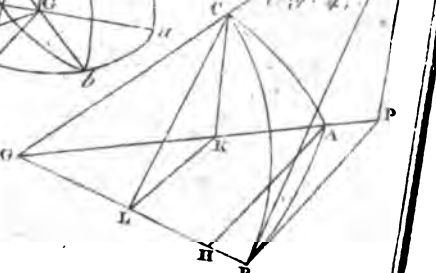
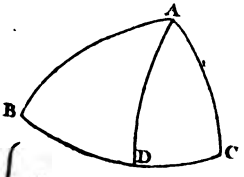


fig. 4.
O
C
G
K
A
P
L
H
B


A
B
D
C

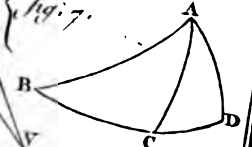
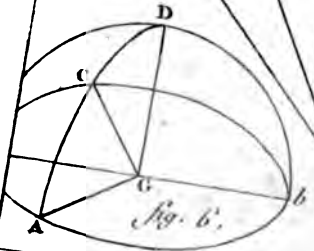


fig. 7.
A
B
C
D


D
C
G
A
b
fig. 6'.

n'excedent pas 2 à 3 mille ou 4000 toises; quand les distances deviennent plus considérables, il faut en employer un qui soit garni d'une bonne lunette fixe, et d'une autre mobile qui sert d'alidade. On sait que le graphometre n'est autre chose qu'un demi-cercle bien divisé en 180°, avec une regle mobile sur son centre, et munie à ses deux extrémités de pinnules fixes et invariables, qu'elle entraîne avec elle. Il porte encore deux autres pinnules perpendiculaires à son plan, et qui répondent l'une vis-à-vis de l'autre aux points marqués 0° et 180°. Pour donner au graphometre plus de justesse dans les mouvements circulaires, les meilleurs sont tellement construits, que leur tige est mobile dans la boule de cuivre qui forme le genou, et tellement disposée qu'au moyen d'une vis de pression, on peut supprimer presque entièrement le grand mouvement. Ensuite, au moyen d'une autre vis sans fin, parallele au plan de l'instrument, et qui engraine dans les divisions d'un plateau circulaire aussi parallele au plan de l'instrument, on peut faire mouvoir le graphometre aussi lentement qu'on le juge à propos; ce qui facilite singulièrement le moyen de ramener insensiblement le rayon visuel dirigé par les pinnules fixes sur les objets que l'on veut observer. L'alidade mobile est pareillement susceptible des deux mouvements, l'un très-libre, en vertu duquel on lui fait parcourir assez rapidement toutes les divisions du limbe, et l'autre très lent, pour ramener insensiblement les pinnules fixées aux

deux extrémités de l'alidade à faire tomber le rayon visuel qu'elles dirigent sur l'objet dont on veut observer l'angle avec le rayon visuel dirigé au premier objet.

Une des qualités essentielles d'un bon graphometre, c'est d'être non seulement bien divisé, mais encore d'être bien centré; c'est-à-dire que les lignes de mire, soit des pinnules de l'instrument et de son alidade, soit les axes des lunetes fixes et mobiles, se coupent bien précisément au centre de l'instrument. Pour vérifier un graphometre, il faut choisir un lieu dont l'horizon soit libre, et environné d'un grand nombre d'objets. On dirigera des rayons visuels à tous ces différents objets, en observant les angles que font tous les rayons visuels deux à deux; en tournant toujours dans un même sens, jusqu'à ce que l'on soit de retour à l'objet dont on est parti, après avoir parcouru le tour entier de l'horizon. On sçait que tous les angles formés autour d'un point valent 360°. Si donc on pouvoit observer chaque angle en particulier avec une précision géométrique; en ajoutant tous les angles observés, on devroit retrouver les 360 degrés; mais il est aisé de sentir qu'aucun ne peut être observé avec cette rigueur absolue, soit à cause de la petitesse des divisions de l'instrument, soit à cause de l'imperfection de notre vue. On pourroit remédier à l'erreur qui provient de la petitesse du rayon de l'instrument; mais en augmentant le rayon pour avoir des degrés plus grands, on augmenteroit aussi considérablement le prix

de l'instrument et la difficulté de le transporter. Il est donc de toute nécessité qu'il y ait quelques erreurs, soit en plus, soit en moins dans la somme de tous les angles d'un tour d'horizon; par rapport à 360°. Si l'on ne trouve que quelques minutes pour un graphometre de 5 à 6 pouces de rayon, on jugera les angles assez bien observés, et l'instrument bien centré. Encore faudra-t-il répéter plusieurs fois l'opération; parcequ'il arrive souvent que le hasard produise des compensations qui feroient juger bon un instrument au-dessous du médiocre. On peut encore vérifier un graphometre en observant séparément chacun des trois angles de plusieurs triangles; car, si ces angles sont bien mesurés, et si l'instrument est suffisamment bon, on doit trouver très-près de 180°, soit en excès, soit en défaut. On doit même observer d'avoir cette attention dans la mesure des grands triangles, de ne point conclure le troisieme angle des deux angles observés sur la base; mais de se transporter au troisieme point du triangle pour observer l'angle. Si l'on s'étoit trompé grossièrement, comme cela peut arriver, dans l'observation des deux premiers angles; cette opération feroit reconnoître l'erreur, et serviroit à concilier quelquefois des inconséquences dont on ignoroit la cause et le principe. On peut regarder les divisions dont on se sert dans les instruments actuels, comme une des inventions les plus heureuses pour la perfection des opérations de la géométrie pratique. On se servoit autrefois, pour estimer les minutes de dix en dix,

de circonférences concentriques tracées sur le limbe de l'instrument, et coupées transversalement par des lignes qui alloient aboutir de chaque degré du cercle intérieur, au degré du cercle extérieur plus ou moins avancé d'une division de 0, ou de 180° : les transversales qui doivent être des circonférences de cercle, étoient tout simplement des lignes droites qui introduisoient nécessairement une erreur dans la maniere d'estimer les minutes de degrés. Nous insisterons peu sur ces divisions qui ont été heureusement abandonnées, pour faire connoître celle que l'on a adoptée généralement aujourd'hui. Cette division est attribuée à un certain *Nonius*, quoique des géometres prétendent qu'il n'en soit pas l'inventeur ; quoi qu'il en soit, voici en quoi elle consiste. On trace sur le limbe de l'alidade mobile, un arc de cercle concentrique à la circonférence extérieure du limbe de l'instrument. Ensuite ayant pris un certain nombre de degrés sur la circonférence du graphometre, et le même nombre de degrés sur l'arc de l'alidade ; on divise cet arc en un autre nombre de parties égales d'une unité plus grand. Par ce moyen on a un arc sur l'alidade d'un certain nombre de minutes plus petit que l'arc d'un degré. Pour donner un exemple, supposons que je veuille avoir les angles avec les minutes de cinq en cinq. L'arc d'un degré sur le limbe de l'instrument sera donc de 60 minutes, et la premiere division sur l'alidade sera de 55′ ; donc puisque les divisions de l'arc tracé sur l'alidade, doivent équivaloir à un cer-

tain nombre de degrés, il faut qu'un certain multiple de 55 soit égal à un autre multiple de 60. Donc les nombres de divisions du limbe et de l'alidade doivent être dans la raison réciproque de 60 : 55, ou bien :: 12 à 11. On prendra donc sur la circonférence du limbe et sur l'alidade un arc de 11 degrés que l'on divisera sur celle-ci en 12 parties égales. Si l'instrument étoit divisé en demi degrés, ou en arcs de 30′; pour avoir les minutes de deux en deux par la division de Nonius; il faudroit qu'un certain multiple de 30 minutes fût égal à un autre multiple de 28 minutes; donc le nombre des divisions sur le limbe et sur l'alidade pour le même arc de part et d'autre, doit être dans la raison réciproque de 30 à 28, ou de 15 à 14; c'est-à-dire qu'il faudroit prendre sur le limbe un arc de 14 demi degrés que l'on diviseroit sur l'alidade en 15 parties égales, et par cette division on pourroit mesurer tous les angles de deux minutes en deux minutes. Enfin, si la circonférence du cercle étoit divisée en quart de degrés; on auroit les angles à une minute près par une division de quatorze quarts de degrés en quinze parties égales. Tout ceci bien entendu, pour mesurer un angle observé, on examinera s'il y a sur le limbe et sur le bord de l'alidade deux divisions qui coïncident absolument : ensuite, partant de cette division pour revenir vers la fleur-de-lis qui est sur l'alidade; et qui correspond au rayon visuel des pinnules, ou à l'axe de la lunette; on comptera toutes les divisions intermédiaires, et

l'on prendra autant de fois 5′ qu'il y aura de pareilles divisions, si le nonius donne les minutes de cinq en cinq ; ou bien autant de fois deux minutes, si la division donne les minutes de deux en deux ; ajoutant le nombre de minutes au nombre de degrés marqués sur le bord de l'instrument, on aura l'angle avec toute la précision dont l'instrument est susceptible. Si l'on ne trouve point de division qui coïncide absolument, comme cela peut arriver très souvent, on s'arrêtera à celles qui approchent le plus de tomber l'une sur l'autre, et l'on estimera du mieux que l'on pourra l'excès ou le défaut, en comptant d'ailleurs comme dans le cas précédent.

Supposons, par exemple, que la fleur-de-lis de l'alidade (*fig.* 171) réponde beaucoup au-delà du 37eme degré de division sur le limbe, et que ce soit le quarante-sixieme degré du limbe qui coïncide absolument avec une division du nonius ; on comptera en retournant vers la fleur-de-lis : ayant trouvé qu'il y a neuf divisions sur l'alidade, on comptera 45′, et l'angle observé sera de 37° 45′. Si la division eût été un peu au-dessous de la division du limbe, par rapport à la fleur-de-lis, on eût retranché à-peu-près deux minutes et demie, et si elle eût été tant soit peu au-dessus, il auroit fallu ajouter à 45′, ce que l'estime auroit fait trouver. M. le chevalier *de Borda* a inventé un nouveau cercle avec lequel on peut mesurer les angles à la seconde, d'après les principes de *Mayer*.

De la réduction des angles au centre.

612. Il arrive très souvent que lorsque l'on veut mesurer un angle, il est impossible de se placer sur le terrain au point qui doit être le sommet de cet angle, pour observer de ce point les signaux placés aux autres angles. Alors on est obligé de prendre cet angle à quelque distance de son véritable sommet, et de corriger l'angle observé pour qu'il soit réellement égal à celui qu'il falloit prendre ; c'est ce qui constitue la réduction des angles au centre dont nous allons donner la théorie.

En général il peut y avoir trois positions différentes de l'observateur à l'égard du centre, relativement aux objets qui doivent former l'angle à observer. Ou bien il se trouve dans la direction du centre à l'un des objets (*fig.* 172), ou bien dans une direction qui passe entre les deux rayons visuels comme dans la *fig.* 173 ; ou enfin, sa position à l'égard du centre et des objets est telle que le rayon visuel mené de l'observateur au centre qui doit être le sommet de l'angle, se trouve entièrement au dehors de l'angle formé par les rayons menés de ce centre à chacun des objets A et B, *fig.* 174 : nous donnerons des regles pour chacun de ces cas.

Premier cas.

613. Lorsque l'observateur est placé dans la direction du centre à l'un des objets (*fig.* 172),

il peut encore arriver deux cas selon qu'il est entre le centre et l'objet, comme en D ou en F; ou bien au-delà du centre par rapport aux objets A et B, comme en *d* et *f*. Cela posé, ayant mené les rayons visuels DB, *d*B, ou FA, *f*A; il est visible que l'angle observé ADB est celui qu'il faut réduire au centre C, pour qu'il soit l'angle véritable ACB. Or, on apperçoit que l'angle ADB étant extérieur au triangle DBC, vaut à lui seul les deux intérieurs opposés; ainsi l'on a ADB = ACB + DBC; donc ACB = ADB — DBC; c'est-à-dire, *qu'il faut retrancher de l'angle observé, l'angle qui est à l'un des objets, et qui a pour base la distance de l'observateur au centre, lorsque l'observateur se trouve entre le centre et l'objet.* S'il se trouve au-delà du centre à l'égard de l'objet, comme en *d*; alors on a l'angle ACB = A*d*B + *d*BC; c'est-à-dire, que dans ce cas, *il faut ajouter à l'angle observé* A*d*B, *celui qui a son sommet au point* B, *et sa base sur la distance de l'observateur au centre.* Nous verrons bientôt comment on calcule ces angles.

Second cas.

614. Lorsque la direction de l'observateur au centre (*fig.* 173) passe entre les rayons visuels menés du centre aux deux objets A et B, comme lorsqu'il est placé en D ou en *d*; ayant tiré le rayon DC*d* prolongé vers G; il est visible que pour le point D, l'angle ACB doit être plus petit que l'angle observé ADB; et que

pour le point *d* le même angle ACB doit être plus grand que l'angle observé A*d*B. Pour trouver la correction convenable à l'un et à l'autre cas, on observera de plus avec soin, l'un des angles ADG ou BDG; ainsi que l'un des angles A*d*G ou B*d*G, lorsque l'observateur est en *d*. Cela posé, il est visible que l'angle total ACB est composé des deux angles ACG et BCG, qui sont correspondants aux angles ADG et BDG. Or à cause de l'angle extérieur ADG, on aura ADG = ACG + DAC; donc ACG = ADG — DAC; pareillement on trouvera BCG = BDG — DBC; donc ACG + BCG ou ACB = ADG + BDG — DAC — DBC, ou encore ACB = ADB — DAC — DBC. C'est-à-dire que lorsque l'observateur se trouve entre les rayons menés de l'angle cherché aux extrémités de la base, et qu'il est entre cette base et le sommet de l'angle; pour avoir l'angle au centre, *on retranchera de l'angle observé les deux angles sous lesquels on verroit la distance de l'observateur au centre des sommets des deux autres angles du triangle.*

Si l'observateur est en *d*, toujours dans une position telle que son rayon à l'objet passe entre les deux rayons menés du centre aux extrémités de la base, mais au-delà du centre par rapport à cette base; on aura l'angle au centre plus grand que l'angle observé A*d*B; et à cause des angles extérieurs ACG, BCG par rapport aux triangles CA*d*, CB*d*; on aura ACG = A*d*G + CA*d*, et BCG = B*d*G + *d*BC; donc ACG + BCG ou ACB = A*d*G + B*d*G

+ CA*d* + CB*d*; = A*d*B + CA*d* + CB*d*; c'est-à-dire que dans ce cas, *pour avoir l'angle au centre, il faut ajouter à l'angle observé la somme des angles sous lesquels on voit des points A, et B, la distance de l'observateur au centre,*

Troisieme cas.

615. Enfin, lorsque l'observateur est tellement placé à l'égard du centre et des objets A et B, que la ligne menée du point de station au centre, ne passe point au dedans de l'angle formé par les rayons menés aux extrémités de la base, comme en D ou *d*; ayant observé les angles ADB et ADC; on aura l'angle AOB qui est extérieur, soit au triangle ADO, soit au triangle BCO; ce qui donne deux valeurs de cet angle AoB; on a donc AoB = ADB + DAC, et AOB = ACB + BCD; donc, en comparant ces deux valeurs du même angle AOB, on aura ADB + DAC = ACB + BCD; donc ACB = ADB + DAC — CBD. Si l'observateur étoit en *d*; on trouveroit de même ACB = A*d*B + *d*BC — CA*d*; d'où l'on forme cette regle générale pour réduire les angles au centre dans la troisieme position; *à l'angle observé ajoutez la différence des angles sous lesquels on doit voir des points A et B, la distance du point de station au centre, et vous aurez l'angle au centre;* ou ce qui vient au même *à l'angle observé, ajoutez-y l'angle sous lequel on verroit votre distance au centre du point qui est du*

même côté que la station à l'égard du centre, et retranchez-en l'angle sous lequel on verroit votre même distance au centre du point qui est de l'autre côté de la station.

Corollaire.

616. Il suit de tout ce qui précede, que dans la premiere position *on ajoutera à l'angle observé, ou l'on en retranchera celui des deux angles en A et en B, dans la direction duquel on ne sera point.* Dans la seconde position on *ôtera de l'angle observé les angles en A et en B, qui ont pour base la distance du point de station au centre; si l'on est entre la base et le centre; ou l'on ajoutera les mêmes angles à l'angle observé, si l'on est plus loin de la base que le centre ou sommet de l'angle demandé.* Enfin, *dans la troisieme position, on ajoutera à l'angle observé celui qui est du côté de l'observateur, et l'on en retranchera l'autre.* Cette théorie bien entendue, il sera facile d'en faire l'application à la pratique, comme on va le voir.

Problême

617. *Soit un objet C, dont on veut avoir la position à l'égard de deux objets A et B, par le moyen d'une base AB, connue, et des angles CAB et CBA, observés aux extrémités de cette base, mais qui ne peuvent être pris du centre de ces mêmes objets à cause des obstacles qui s'y rencontrent; on demande de déterminer*

toutes les parties du triangle BAC, comme si l'on avoit pour objet les mêmes angles dans leur vrai sommet (fig. 174 bis).

SOLUTION.

Ayant pris les points *a* et *b* dans la position la plus commode auprès des vrais lieux A et B, et estimé avec le plus de précision possible les distances A*a*, B*b* de ces points de station aux vrais centres A et B on observera au point *a* les angles C*a*B et C*a*A, que l'on cotera sur une figure avec les degrés et minutes qui leur conviennent. On observera pareillement au point *b* les angles C*b*A et C*b*B avec les mêmes attentions; cela fini, on observera que les angles C*c*B, CAB, sous lesquels on voit le côté CB du triangle ACB, sont sensiblement égaux; on verra de même que les angles C*b*A, CBA, sous lesquels on doit voir des points *b* et B le côté AC du même triangle, sont encore sensiblement égaux; on regardera donc d'abord ces mêmes angles C*a*B et C*b*A comme s'ils étoient respectivement égaux à ceux en A et en B du triangle ACB; donc, en ôtant leur somme de 180°, on aura une valeur très approchée de l'angle ACB. Au moyen de cet angle et de la base AB qui lui est opposée, et supposée connue, on calculera les côtés AC et CB; donc au triangle AC*a*, dont on connoît le côté A*a* avec le côté *a*C très approché, et l'angle observé A*a*C, on pourra calculer l'angle AC*a*, qui donnera la valeur de l'angle BAC par le n°. 5. De

même au triangle BC*b*, on connoît le côté BC qui vient d'être calculé d'une maniere très approchée ; donc, à cause de l'angle observé B*b*C et du côté B*b*, connu par mesure réelle ou par une estime suffisante, on calculera encore la valeur de l'angle BC*b*, par le moyen duquel on fera la réduction de l'angle B*b*A à l'angle CBA par le n°. 615. Les angles BAC et ABC, ainsi calculés, on aura une nouvelle valeur de l'angle C, et l'on pourra regarder le triangle comme celui dont les angles auroient été en effet observés aux sommets véritables en A et en B. Si l'on n'étoit pas content de cette premiere détermination, on calculeroit de nouveau la valeur des côtés AB et AC ; au moyen desquels on recommenceroit le calcul une seconde fois, comme il vient d'être dit ; et après cette opération, on peut regarder le triangle comme s'il eût été calculé d'après des angles observés aux vrais points de station A et B, quoique d'après des stations réellement différentes aux points déterminés *a* et *b* le plus convenablement qu'il a été possible. C. Q. F. T. et D.

Ce problême renferme toute la théorie et toute la pratique de la réduction des angles au centre, eu égard aux différents obstacles qui peuvent se rencontrer sur le terrain. Pour en faciliter encore la pratique, on a dressé des tables de la valeur des angles sous lesquels on voit des distances données dans des éloignements aussi donnés. Voyez les Tables de M. l'abbé *de la Grive*.

CHAPITRE VIII.

De la réduction des angles au plan de l'horizon, et de la maniere de calculer tous les points d'une grande carte, à l'égard de deux lignes, dont l'une est une méridienne, et l'autre une perpendiculaire à cette premiere.

618. Il arrive souvent que les objets dont on veut fixer la position sur un plan se trouvent au-dessus ou au-dessous de l'horizon de l'observateur; et comme on doit rapporter tous ces points sur un seul et même plan, on est obligé de réduire les angles observés à ceux qui seroient formés par des rayons visuels menés de l'œil de l'observateur aux points où aboutiroient sur l'horizon les perpendiculaires abaissées des extrémités des points observés sur le plan horizontal qu'on suppose être le même que celui qui passe par l'œil de l'observateur. Cette théorie est sur-tout nécessaire dans les plans d'une grande étendue, dont les principaux points doivent être liés par une chaîne de triangles, et former le canevas des parties à détailler ensuite sur une plus grande échelle.

Je ne connois sur cette matiere aucun auteur élémentaire qui en ait traité avant M. l'abbé *de la Grive*, dans un petit ouvrage qui a pour titre : *Manuel de Trigonométrie;* mais les solutions qu'il propose sont si éloignées de la simplicité dont ces sortes de problêmes sont susceptibles, que ceux mêmes qui en auroient le plus grand besoin seroient peu tentés d'en faire usage.

En général il peut se présenter quatre cas dans la pratique, suivant la position des objets observés à l'égard de l'horizon. En effet, 1°. il peut arriver que les deux points où l'on dirige des rayons visuels soient tous deux au-dessus de l'horizon; 2°. qu'ils soient tous

deux au-dessous ; 3°. que l'un soit au-dessus et l'autre au-dessous ; 4°. que l'un des objets soit dans l'horizon, et l'autre au-dessus ou au-dessous. Tous ces différents cas se réduisent à un triangle sphérique, dont on connoît les trois côtés, et dont il faut calculer un angle compris entre deux plans verticaux. C'est afin de ne rien laisser à desirer sur cette partie sans démonstration, que j'ai cru devoir augmenter cet ouvrage d'un traité de Trigonométrie sphérique plus étendu que tous ceux qu'on trouve dans les traités élémentaires. Passons à la solution d'une question qui, dans sa généralité, donnera la maniere de résoudre toutes les questions de cette espece.

PROBLÊME GÉNÉRAL.

619. *Soient deux objets A et B, l'un élevé au-dessus de l'horizon d'une quantité Aa, telle que l'angle ACa formé par des rayons visuels menés de l'œil de l'observateur au point A et dans le plan de l'horizon, soit d'une grandeur sensible, et qui a pu être mesurée; l'autre abaissé au-dessous de l'horizon d'une autre quantité Bb, telle que l'on ait pu mesurer pareillement du point de station C l'angle BCb, sous lequel on voit la hauteur Bb; supposant de plus que l'on ait observé l'angle formé par des rayons visuels CA, CB, dirigés du même point des stations aux objets A et B; trouver l'angle ACb formé par les rayons visuels supposés dirigés dans le plan de l'horizon aux points de projection des objets A et B sur le même plan.*

SOLUTION.

Par le point C lieu de l'œil de l'observateur et les lignes verticales Aa, Bb, concevons deux plans indéfinis qui seront aussi verticaux, et qui se couperont dans une ligne commune CZ également verticale. Concevons de plus que dans ces mêmes plans avec un rayon pris à volonté, on ait décrit des arcs de cercle terminés aux rayons visuels CA et CB ; il est visible que les

arcs DCZ, GCZ seront chacun de 90°; donc, à cause des angles AC*a*, BC*b*, supposés connus et mesurés au point de station, les arcs FCZ et LCZ seront également connus; le premier étant égal à 90° moins l'angle AC*a* mesuré par l'arc FD; le second à 90° plus l'angle BC*b* mesuré par l'arc GL. Si donc, comme on le suppose, on connoît encore l'angle ACB, formé par des rayons dirigés aux objets A et B, et si du point C comme centre avec le rayon qui a servi à décrire les arcs DFZ, LGZ, on décrit encore l'arc FL, on aura formé le triangle sphérique LZF, dont les trois côtés sont connus, et dont l'angle Z, mesuré par l'arc DG, est l'angle observé ACB réduit à l'horizon.

Pour ne rien laisser à desirer sur cette théorie, nous allons en faire l'application à un exemple en nombre.

Supposons donc que l'on ait observé la hauteur A*a* sous un angle de 12° 16′, celle B*b* de 9° 34′ au-dessous de l'horizon, et qu'enfin l'angle ACB est de 56° 42′; on demande la valeur de ce dernier angle réduit à l'horizon. Ces suppositions donneront les valeurs des trois côtés du triangle LZF comme il suit.

ZF =	77°	44′	117°	0′
ZL =	99°	34′	77	44
FL =	56°	42′	39° 16′	différ. du côté FL à la demi-som.
somme des trois côtés =	234°	0′	117°	0′
demi-somme des côtés =	117°	0′	99°	34′
			17° 26″	diff. du côté LZ à la demi-som.

on aura donc cette proportion suivant le n°. 578, *sin.* 77° 44′ × *sin.* 99° 34′ : *sin.* 39° 16′ × *sin.* 17° 26′ :: RR : *sin.*² ½ DCG; et par logarithmes,

9,801356 = *log. sin.* 39° 16′
9,476536 = *log. sin.* 17° 26′
0,010030 = C. *arith. log. sin. de* 77° 44′
0,006082 = C. *arith. log. sin. de* 99° 34′.

19,294004
9,647002 = *log. sin. de* 26° 20′ 4″.

Donc

Donc l'angle observé réduit à l'horizon est de 52° 40' 8''. L'opération dépendra toujours de la résolution d'un triangle sphérique, dont les trois côtés sont connus, quelle que soit la position respective des objets à l'égard de l'horizon. Il convient seulement d'ajouter encore un cas qui se présente assez souvent, c'est lorsque des extrémités d'une base AB, on observe un objet C élevé (*fig.* 178) au-dessus de l'horizon par des rayons visuels AC, BC, dont on mesure les angles CAB et CBA. On voit que si l'on veut rapporter la position du point C sur une carte, les rayons visuels CA, CB étant plus grands que les rayons horizontaux dirigés au centre de l'objet C; l'assiette du point observé sera hors de sa vraie place: dans ce cas il est nécessaire de mesurer à chacune des stations A et B, les angles formés par les rayons CA, DA; et par les rayons CB, DB; et alors du point A, comme centre décrivant avec un rayon quelconque, trois arcs GF, GL, FL, on aura un triangle sphérique rectangle en F, dont il faut calculer l'angle FAL, qui donnera la valeur de l'angle observé BAC réduit à l'horizon. On fera la même opération au point B pour avoir l'angle ABD, qui donnera la vraie position du point C sur la carte par la commune section des lignes AD, BD. Nous ne croyons pas nécessaire d'entrer dans un plus grand détail sur cette partie de la réduction des angles à l'horizon.

De la maniere de calculer tous les points d'une carte à l'égard d'une ligne méridienne, et d'une perpendiculaire à cette méridienne.

620. Quelque soin qu'on ait apporté dans la mesure des angles sur le terrain; lorsqu'on veut fixer sur le papier les principaux points d'une carte, il est encore d'autres erreurs qu'il est bon d'éviter. Il faut n'employer le rapporteur que le moins qu'il est possible pour rapporter les angles; et se servir toujours d'une échelle de parties égales pour déterminer les angles des triangles par le nombre de parties égales comprises dans les côtés

qui les renferment. Encore, quoique cette méthode soit infiniment plus exacte que la premiere, il arrive souvent que les côtés des triangles se coupant trop obliquement, l'erreur insensible sur les premieres opérations se multipliant continuellement, devient à la fin considérable; et tendroit à défigurer totalement la position respective des objets. Pour éviter tous ces inconvénients, on a imaginé de rapporter la position de chaque point à une ligne droite que l'on appelle *méridienne*, parcequ'elle est ordinairement dirigée dans le sens de la méridienne, et à une autre ligne perpendiculaire à celle-ci, que l'on appelle la *perpendiculaire*, parcequ'elle est en effet perpendiculaire à la premiere. Nous allons voir comment ces lignes se calculent, en supposant que l'on connoisse tous les côtés et tous les angles des triangles liés les uns aux autres; et qu'il s'agit de rapporter. Les distances à la perpendiculaire donnent les différences de latitude des différents points, et les distances à la méridienne donnent les différences de longitude.

Cela posé, soit donc une suite de points A, B, C, D, E, F, (*fig.* 179) liés ensemble par des triangles dont on a mesuré tous les angles, et dont les côtés ont été calculés d'après une base donnée et bien vérifiée. Soient de plus deux droites MO, TV indéfinies perpendiculaires l'une à l'autre, dont la premiere soit prise pour méridienne, et la seconde pour la perpendiculaire à la méridienne. Afin de rapporter tous les points à ces deux lignes; il faut d'abord supposer que l'on ait déterminé par observation l'angle que fait un côté AB du premier triangle avec cette méridienne, ainsi que la distance du point M où la méridienne coupe le côté AB à l'un des points A et B. Tout ceci bien entendu, rien ne sera plus facile que de calculer les distances des points de la carte à ces deux lignes fondamentales, en n'y employant que des triangles rectangles. Car, 1°. au triangle ALM connoissant l'angle AML avec l'hypoténuse AM, on connoîtra le côté ML et le côté AL; qui sont les deux lignes qui donnent la position du point A. Pareillement au triangle rectangle BMG, on connoît

outre l'angle droit le côté BM, et l'angle BMG qui a été déterminé par observation comme on le suppose. On aura donc les lignes MG et BG qui fixent le point B. Pour avoir de même le point C, on menera par le point B une droite B*b* parallele à la méridienne terminée au prolongement de la perpendiculaire CK; et alors au triangle BC*b* rectangle en *b*, on connoît le côté BC, ainsi que l'angle BC*b*; car à cause de l'angle connu ABC, et de l'angle MBG, que l'on vient de calculer, on a la valeur de l'angle GBC, ou de son alterne BC*b*; donc on calculera les lignes C*b* et B*b*; retranchant ensuite K*b*, de C*b*, on aura CK; et ajoutant B*b* à MG déja connue, on aura KM pour la distance du point C à la perpendiculaire. On trouvera par des calculs absolument semblables, les distances DH et MH; EI, MI; FO, OM des points D, E, F à la méridienne, et à la perpendiculaire.

621. S'il y a quelque point comme P qui appartient à un triangle dont aucun côté ne coupe la méridienne; pour calculer ses distances PQ et QM, il faudra prolonger un de ses côtés comme BP, jusqu'à ce qu'il rencontre la méridienne en R, et alors à cause des angles connus DBP, DBC, CBG, si l'on retranche tous ces angles, de deux droits; on aura l'angle GBR ou son complément BRG, au moyen duquel au triangle rectangle BGR on calculera la valeur de la ligne BR, et de la ligne GR; ce qui donnera dans le triangle rectangle PQR, le côté PR tout entier, par lequel on déterminera la ligne PQ et la ligne QR; d'où retranchant la connue MR, il restera MQ pour la distance du point P à la perpendiculaire. Il en seroit de même de tout autre point lié par des triangles quelconques, avec ceux qui coupent la méridienne. Nous laissons aux commençants le plaisir d'appliquer eux-mêmes ces principes à quelque suite de triangle. On peut regarder cette méthode comme une des plus importantes dans la levée d'une grande carte, et c'est pour ceux qui seroient employés dans des ouvrages de cette nature, que j'ai joint ici les détails de cette espece de réduction.

CHAPITRE IX.

De la résolution des principaux Problêmes de Trigonométrie rectiligne.

PROBLÊME I.

622. MESURER *une distance inaccessible DE par les angles observés en A et en B aux extrémités d'une base connue AB*, (*fig.* 180).

SOLUTION.

Supposons que la base AB mesurée avec toute l'exactitude possible, a été trouvée de 3600 toises, et que les angles au point A sont l'un; savoir DAB de 95° 30′, et l'autre DAE de 48°, 20′; que les angles au point B ont été pareillement observés; l'un, savoir ABE de 97° 40′, et DBE de 46° 18′. Il est visible que tout se réduit à trouver les deux côtés AD et AE du triangle DAE; ou les deux côtés BD, BE du triangle DBE; car si l'on parvient à les connoître, on aura un triangle dont la distance inconnue DE est un côté, et dans lequel on connoîtra deux côtés avec l'angle compris. Arrêtons-nous à calculer le triangle DAE; pour cela je retranche d'abord l'angle DBE de 46° 18′ de l'angle ABE de 97°. 44′, ce qui me donne pour l'angle ABD, 51° 22′; donc l'angle ADB sera de 33° 8′; je ferai donc cette proportion pour avoir AD. *sin.* 33° 8′ : AB (3600′). :: *sin.* 51° 22′ : AD, que l'on trouvera de 5145 toises. On calculera de la même maniere le côté AE par le moyen du triangle AEB: pour cela j'ôte l'angle DAE de l'angle DAB, et je trouve l'angle BAE de 47, 10′ : retranchant encore cet angle, et l'angle ABE que nous supposons de 97° 40′, de 180°, j'aurai l'angle BEA de 35° 10′. Donc on aura la proportion *sin.* E (35° 10′) : AB (3600) :: *sin.* 97° 40′ : AE, que l'on trouvera de 6195 toises; on voit donc que

dans le triangle DAE on est parvenu à connoître les deux côtés AD, AE ; avec l'angle DAE de 48 20′ : on fera donc l'analogie suivante AE + AD : AE — AD :: *tang.* ($\frac{1}{2}$D + $\frac{1}{2}$E) : *tang* ($\frac{1}{2}$D — $\frac{1}{2}$E) ou

11340 : 1050 :: *tang.* 65° 50′ : *tang.* ($\frac{1}{2}$D—$\frac{1}{2}$E), et par logarithmes,

10,348026 = *log. tang.* (65° 50′).
3,021189 = *log.* 1050.
5,945387 = *comp. arith. log.* 11340.

9,314602 = *log. tang.* 11° 39′ 33″.

Donc l'angle ADE sera de 77° 29′ 33″, et l'angle AED de 54° 10′ 27″. Pour trouver la distance inconnue DE, on n'aura donc plus qu'à faire cette proportion *sin.* AED : AD :: *sin.* DAE : DE, ou en nombres *sin.* 54° 10′ 27″ : 5145 :: *sin.* 40° 23′ : DE, et par logarithmes,

9,873335 = *log. sin.* 48° 20′.
3,711385 = *log.* 5145.
0,091086 = *comp. arith log. sin.* 54° 10′ 27″,4

3,675806 = *log.* 4740 = DE. C. Q. F. T.

SCHOLIE.

623. Quelquefois on peut être dans le cas de résoudre un problême très différent de celui-ci (*fig.* 181), quoique dépendant des mêmes principes. Supposons, par exemple, qu'en levant la carte d'un pays, on veut y marquer la position de différents points F, G, H, I, K qu'on ne peut voir commodément que des deux points A et B ; mais tellement situés, que l'on ne peut mesurer la distance qui les sépare, soit à cause de l'irrégularité du terrain, soit à cause d'un marais ou d'un étang qui se trouve entre ces deux points : on fera placer deux piquets en D et en E, dans un terrain où l'on puisse mesurer facilement une base DE ; ensuite on observera aux

points de station A et B, tous les angles DAE, DAB; EAD, EBA; comme si l'on vouloit déterminer la distance DE par le moyen de la base connue AB. On voit donc présentement que ce problême est l'inverse du précédent. J'ai donné dans la nouvelle édition du cours de M. *Belidor*, la maniere de résoudre ce problême directement; mais une regle de fausse position y conduit encore plus aisément comme il suit. Supposons que la base DE soit de 5400 toises, et qu'on veuille déterminer la distance AB par le moyen de cette base, et des angles observés aux points A et B. On commencera par donner une valeur arbitraire à la ligne AB, et l'on calculera par ce moyen, la distance DE comme on vient de faire au dernier problême; si cette ligne se trouvoit du même nombre de toises qu'on a mesurées sur le terrain, ce seroit signe que l'on auroit donné à la ligne AB sa vraie valeur; mais il n'y a guere à compter sur de pareils hasards. Ainsi on aura pour DE une valeur qui en différera d'une quantité quelconque, soit par excès, soit par défaut. Pour trouver par cette valeur la véritable longueur de la ligne AB, on fera cette proportion, *comme la valeur trouvée par le calcul pour la ligne DE, est à sa vraie valeur, ainsi la valeur premièrement donnée à la ligne AB est à la vraie valeur de cette ligne AB.*

Cette ligne une fois connue, ainsi que tous les angles aux points A et B formés avec cette base par les rayons visuels AF, AG, AH, AI, AK; BF, BG, BH, BI, BK; dans chacun de ces triangles AFB, AGB, etc., on connoîtra deux angles sur la base, aussi connue AB; ainsi l'on calculera tous les côtés de ces triangles par l'analogie ordinaire, et les points F, G, H, etc. seront fixés sur la carte comme si l'on avoit mesuré la base AB.

N. B. On suppose dans ce problême que des points D, E, on ne peut voir tous les points à marquer sur la carte, à cause que les derniers se trouvent dans un fond, à l'égard des premiers; sans quoi il seroit inutile de s'y prendre comme on vient de faire.

PROBLÊME.

624. *Connoissant les trois côtés d'un triangle BAC* (fig. 182 et 183), *ou ce qui revient au même la position de trois objets B, A, C; connoissant de plus les angles sous lesquels on apperçoit deux des côtés de ce triangle d'un point inconnu F; trouver les distances de ce même point F aux trois points donnés.*

SOLUTION.

Ce problême peut avoir différents cas selon que le point inconnu F se trouve au dedans ou au dehors du triangle, ou sur la direction d'un des côtés de ce même triangle. De plus, nous avons déja donné une solution géométrique de ce problême dans le premier livre de Géométrie, en n'employant que la regle et le compas pour le résoudre. Comme les solutions de cette espece sont toujours beaucoup moins exactes que celles qui sont déduites des calculs trigonométriques; nous allons donner la solution de ce même problême par cette seconde méthode.

Pour cela concevons une circonférence de ce cercle qui passe par deux points quelconques du triangle, et par le point inconnu F, et soient menées les lignes BD et DC du point où la ligne AF coupe cette même circonférence aux points B et C. Cela posé, les angles AFC et AFB étant connus par observation (*fig.* 182), leurs suppléments DFC, DFB le seront aussi; ces angles sont respectivement égaux aux angles DBC et DCB; donc au triangle BDC on connoîtra le côté BC avec les deux angles sur ce côté; donc on pourra calculer la valeur des côtés BD et DC. Donc au triangle DCA, on aura les deux côtés AC et DC avec l'angle compris DCA; ainsi on calculera la valeur des angles CAD et CDA; donc enfin, au triangle AFC on connoîtra l'angle AFC, qui est celui sous lequel on voit le côté AC, et l'angle CAF que l'on vient de calculer; on fera donc *sin.* AFC;

AC :: *sin.* CAF : CF. On calculera de la même maniere la ligne DF par le moyen du triangle ABD où l'on connoît l'angle ABD avec les côtés AB et BD, par le triangle ABF. Ayant déterminé la longueur des lignes CF et BF; pour déterminer la position du point inconnu F, on décrira des points B et C comme centres avec des rayons respectivement égaux aux lignes BF et CF, que l'on vient de calculer, deux arcs de cercle dont l'intersection donnera le point F demandé.

Si le point F se trouve au dehors du triangle BAC (*fig.* 183), les calculs se feront précisément de la même maniere; enfin, le problême n'aura aucune difficulté si le point F se trouvoit sur l'un des côtés du triangle comme en *f*, dans le prolongement de AB; car dans ce cas, au triangle *f*BC, on connoît l'angle observé A*f*C, et l'angle *f*BC, supplément de ABC, qui est supposé connu, avec le côté BC qui est un des côtés aussi connu du triangle BAC; donc on aura la valeur des lignes B*f* et C*f*, qui donnent la position du point *f*. C. Q. F. T. et D.

PREMIER SCHOLIE.

625. Ce Problême peut être d'usage dans une infinité de circonstances; et si l'on fait la même opération sur un grand nombre de points, desquels on puisse appercevoir les trois points A, B, C, on aura avec une facilité surprenante la position de tous ces points, sans d'autres opérations sur le terrain que des observations d'angles. Ce problême peut faire connoître très exactement les principaux points d'une attaque pour disposer ensuite toutes les opérations de la maniere la plus convenable au plan du général.

SECOND SCHOLIE.

626. On peut faire usage de la trigonométrie pour résoudre une infinité d'autres questions que celles qu'on vient de voir; nous joindrons encore ici les applica-

tions suivantes qui peuvent se rencontrer plus fréquemment. *S'il étoit question de mener par un point donné A une droite AG parallele à une ligne inaccessible DE.* Après avoir calculé cette distance DE, et les angles ADE, AED, on tirera la ligne AG qui fasse avec AE l'angle GAE égal à l'angle AED, et le problême sera résolu.

TROISIEME SCHOLIE.

627. *Quelquefois on peut avoir besoin de trouver plusieurs points C et D qui soient dans le même alignement que d'autres points donnés A et B* (fig. 184), *quoique de ces mêmes points on ne puisse appercevoir les points A et B, à cause d'un obstacle intermédiaire.*

Dans ce cas, on choisira sur le terrain un point F, duquel on puisse appercevoir commodément tous les points A, B, C, D, et l'on s'occupera d'abord du triangle ABF dont il faudra déterminer tous les angles et les côtés, soit par des mesures actuelles, soit par le calcul. Ce triangle une fois déterminé dans toutes ses parties, on observera les angles AFC, AFD; et alors dans chacun des triangles AFC, AFD, on connoît le côté AF avec les deux angles en A et en F; on calculera donc la valeur des lignes FC, FD; et si le terrain le permet, on mesurera dans la direction des lignes FC, FD les nombres de toises calculées pour FC et pour FD. Les points où ces nombres se termineront, donneront les points C et D qui sont dans l'alignement des points A et B.

Si l'on ne peut mesurer ces lignes sur le terrain, on établira une nouvelle base FG que l'on mesurera le plus exactement qu'il sera possible. Ensuite ayant observé l'angle GFC, on connoîtra dans le triangle GFC les deux côtés FG, FC avec l'angle qu'ils comprennent; ainsi l'on aura la valeur de l'angle FGC : faisant donc planter un signal qui soit en même temps dans l'alignement FC, et dans celui GC, on aura la position du point C. Enfin, faisant au point C l'angle FCB égal à

l'angle C du triangle ACF tel qu'on l'a calculé, on aura la direction de la ligne ACD qui se trouvera dans le prolongement de la ligne AB.

CHAPITRE X.

De la Topographie.

628. Les opérations de trigonométrie dont on vient de parler, servent à fixer de la maniere la plus précise, les principaux points d'une carte très étendue ; mais il faut après cela remplir le détail du plan en figurant tout ce qui doit se trouver sur ce plan, comme les parcs, les châteaux, les églises; les enceintes de maisons qui forment les villes, les bourgs ou les villages ; le cours des rivieres ou des ruisseaux considérables, leurs sources ; les moulins à vent, les justices, les fermes ; en un mot, ce qui peut se trouver sur la surface d'un pays bien cultivé et bien habité. Cette partie de la levée des plans est ce que l'on appelle *topographie*, ou description des lieux. Les instruments qu'on y emploie le plus ordinairement, sont le graphometre, la planchette et la boussole ; on peut également se servir du graphometre ou de la planchette pour déterminer les isles de maisons dont les différentes masses forment les villes, et dont les différentes figures ou contours donnent celles des places ou directions des rues. La boussole ne sert guere qu'à fixer les cours des ruisseaux considérables, ou des petites rivieres, et à remplir le détail entre des points donnés. Nous commencerons par indiquer comment on figure les alignements des rues, soit au graphometre, soit à la planchette ; ensuite nous donnerons la maniere d'opérer en grand sur le terrain avec la planchette ; enfin, cette partie de la géométrie pratique sera terminée par l'usage de la boussole.

529. Pour faire le plan d'une ville tout se réduit à

lier ensemble par différents polygônes toutes les masses de maisons qui en sont les principales parties (*fig.* 185). On commencera d'abord par tracer des alignements tels que AB, BC, CD, DE, EF, en observant aux points de station tous les angles que ces lignes sont entre elles, ainsi que les alignements des rues adjacentes, tels que ceux formés par les lignes AG, BL, CK, DH, EF. Ces angles se mesurent ordinairement au graphometre, et doivent être observés avec tout le soin possible. On mesure ensuite la longueur de chacune des lignes qui forment le polygône qui doit renfermer une isle de maisons, et l'on forme le polygône par le moyen de ses angles et de ses côtés qui deviennent tous déterminés par l'observation et les mesures prises sur le terrain. On passe ensuite au détail de toutes les sinuosités, de tous les angles saillants et rentrants que forment ensemble les murs des différentes maisons particulieres; ce qui se fait en mesurant de nouveau les différentes parties de chaque ligne principale, ou de chaque côté du polygône, comme *Aa*, *ab*; *bc*, *cd*, *df*, *fg*; qui répondent à quel angle que ce soit, enfin en prenant toutes les perpendiculaires aa^{1}; bb^{1} *cc*, dd^{1}, ff^{1}, gg^{1} qui mesurent les distances de tous ces points à la base principale : on fixe la position de tous ces points sur le plan par le moyen de l'échelle qui a d'abord servi à former l'enceinte du polygône principal. Dans la crainte que l'on n'ait commis quelque erreur en détaillant tout ce qui se rencontre dans chaque alignement, il faut ajouter toutes les petites mesures particulieres, et voir si leur somme est égale à la base AB premièrement mesurée. D'ailleurs on s'apperçoit aisément qu'en s'y prenant comme on vient de l'indiquer, s'il y a quelque erreur, elle est nécessairement renfermée entre des limites très étroites, et ne peut influer sur les autres parties du plan.

630. S'il y a dans la ville une ou plusieurs places publiques, il est bon de commencer le plan par cette partie, sur-tout si la place a une grande étendue, parceque l'on y peut établir ordinairement un grand

nombre de points fixes, et placer l'origine des différents alignements, qui du centre de la place vont déterminer les différents quartiers. Pour lever ces sortes de places publiques avec toute l'exactitude possible, si elles ne sont pas régulieres, comme cela arrive souvent, on s'y prendra de la même maniere que pour lever une masse de maison, avec cette différence qu'on peut dans le cas présent diviser le polygône proposé en autant de triangles qu'il a de côtés, et mesurer tous les côtés de chacun de ces triangles; ce qui détermine le polygône avec une précision bien plus grande encore que par la mesure de ses côtés et des angles qu'ils forment entre eux. Supposant, par exemple (pour ne pas trop multiplier les figures), que la masse de maisons renfermée dans le polygône ABCDE n'existe plus, mais que cet espace est totalement libre; on commencera par faire placer des jalons ou piquets aux principaux angles de cette place, et particulièrement à ceux qui répondent à l'entrée des rues qui y viennent aboutir; ensuite ayant pris un point O duquel on puisse voir commodément tous les points A, B, C, D, E, on y dirigera des rayons visuels OA, OB, OC, OD, OE dont on mesurera la longueur avec la plus grande précision; on mesurera de même les côtés AB, BC, etc. de ces triangles qui forment le contour du polygône, et ce même polygône se trouvera construit et déterminé sans la mesure d'aucun angle. On levera ensuite les différentes parties des faces de la place, comme nous venons d'enseigner à détailler les différentes parties de chaque rue.

S'il se trouve dans la ville quelque bâtiment considérable, public ou particulier, comme hôtel-de-ville, cathédrale, château, etc., on en formera l'enceinte, et ensuite on prendra tous les détails sur une feuille séparée et sur une plus grande échelle; après quoi l'on rapportera le tout sur l'échelle du plan dans l'enceinte qui doit renfermer cette même partie du plan.

Les édifices publics et réguliers se trouvent assez souvent symmétriques : on en détermine toutes les di-

mensions d'une maniere plus expéditive en se servant de lignes qui passent par les milieux, et qui divisent toute la surface du plan en parties égales et semblables. Quand on saura lever les plans irréguliers, on sera à plus forte raison en état de tracer les plans réguliers qui sont ordinairement beaucoup plus faciles à mesurer. Ainsi nous n'entrerons pas dans un plus grand détail sur cette partie de la topographie.

De la planchette et de la maniere de lever avec cet instrument; des opérations en grand sur le terrain, et des attentions qu'il faut avoir pour bien figurer.

631. La planchette est un des instruments les plus simples et les plus utiles dont on puisse faire usage dans la géométrie pratique. Il est aussi un des plus anciens, et peut-être celui dont on s'est servi avant tous les autres. Cet instrument n'est autre chose qu'une petite planche quarrée d'environ deux pieds superficiels; on peut lui donner depuis 16 pouces de côté jusqu'à 24. Cette planche est attachée à un support établi sur trois pieds pour lui donner le plus de stablité qu'il est possible. Elle doit être tellement disposée, qu'elle puisse facilement se mouvoir en tout sens, et se fixer à demeure dans telle situation que l'on juge à propos. Il faut aussi qu'elle puisse s'incliner à l'horizon, ou lui être parallele, s'il est nécessaire; il faut qu'elle soit travaillée de maniere à ne point se tourmenter ou se courber par les vicissitudes du froid et du chaud. En un mot, plus elle réunira de facilité dans ses mouvements, et plus on opérera sûrement avec elle.

On peut regarder comme un des instruments les plus parfaits en ce genre, celles que l'on trouve chez Mme la veuve *Lennel*, et dont l'invention est due à M. *Cuneau*, connu par son habilité dans les méchaniques. Un des avantages de la planchette sur les autres instruments qui servent à lever des plans, c'est que tout se prend sur

celle-ci, sans être obligé de s'assujettir à aucun nombre, excepté pour les mesures des bases et des lignes qui en tiennent lieu. Tout les angles se tracent tels que l'observation les donne; et si l'on se sert d'une bonne échelle de parties égales pour donner aux différentes lignes autant de parties qu'elles ont de toises sur le terrain, le plan se trouve figuré et dessiné sur le lieu, sans être obligé de le rapporter d'après des cartes embrouillées, souvent trompeuses, et d'après un croquis toujours très éloigné de la figure qu'il doit représenter, lorsque celui qui l'a fait n'est pas accoutumé à estimer les angles et les distances à la simple vue. Il seroit à souhaiter que tous ceux qui se destinent à l'art de lever des plans de quelque nature que ce soit, commençassent par s'exercer beaucoup aux opérations de la planchette, pour être en état par la suite de figurer le terrain sans aucun instrument, et même d'après de simples mesures prises au pas. C'est en quoi consiste particulièrement le talent d'un habile ingénieur géographe, beaucoup plus que dans des connoissances profondes de géométrie, qui le laissent sans ressources lorsqu'il s'agit d'opérer promptement sur le terrain; on sent combien la justesse du coup-d'œil et l'habitude du dessin sont essentiels à ceux qui se consacrent à cette partie si utile au général qui se confie en partie à leurs talents, et qui ne peut souvent juger que d'après leurs plans et les instructions qui les accompagnent.

La planchette est ordinairement garnie d'un chassis de bois dans lequel elle s'encadre, et s'y tient assujettie par des vis qui traversent l'épaisseur du chassis. Lorsqu'on veut lever un plan avec cet instrument, on prend une feuille de papier d'Hollande, qui ne doit être ni trop fort ni trop fin. On le mouille en l'humectant partout avec une éponge remplie d'eau, et après avoir enlevé la planchette de son chassis, on y étend le papier le plus également qu'il est possible; on recouvre ensuite la planchette de son chassis, qui assujettit le papier d'une maniere fixe sur la surface polie de l'instrument. Le papier, en se séchant, s'étend encore plus

parfaitement, et présente une surface des plus commodes pour y tracer toutes les opérations qui doivent former le plan. Cette préparation doit se faire la veille du jour que l'on doit opérer sur le terrain, afin que le papier ait eu tout le temps de se sécher et de s'étendre comme il convient.

Pour pouvoir prendre les alignements sur le terrain, et les tracer sur le papier appliqué à la planchette, on se sert d'une regle ou alidade de cuivre, garnie de deux pinnules, par lesquelles on dirige les rayons visuels aux différents objets dont on veut avoir la position. Il faut de plus, se servir d'un certain nombre d'aiguilles très fines et bien droites. On les enfonce sur la planchette aux points qui doivent marquer les extrémités des bases mesurées sur le terrain, ou déterminées par les opérations géométriques ; par exemple, pour tracer sur la planchette l'angle que font entre eux les rayons visuels dirigés du point de station A aux deux objets B et C (*fig.* 186), ayant fixé une aiguille au point A, on posera l'alidade ou la regle de maniere qu'en regardant par les pinnules, on puisse appercevoir les objets B, C par les rayons visuels AB et AC. Si l'on peut mesurer sur le terrain les distances AB et AC; en prenant sur l'échelle du plan autant de parties égales qu'on aura trouvé de toises sur le terrain, et les portant de A en *b* et de A en *c*; on aura la position des objets B et C.

On peut faire avec la planchette toutes les opérations que l'on fait avec le graphometre : ainsi pour lever les masses de maisons qui forment une ville, on opéreroit avec la planchette précisément de la même maniere qu'avec le graphometre; et même on peut préférer ce premier instrument au dernier pour les opérations de détail, parceque, comme nous l'avons déja dit, le plan se trouve tout rapporté. Pour montrer comment on doit faire usage de la planchette pour les opérations en grand sur le terrain, nous joindrons ici l'article suivant, où l'on verra toutes les attentions qu'il faut avoir, et différentes manieres de fixer tous les points principaux qui doivent être marqués sur le plan.

Des opérations en grand sur le terrain, avec la planchette, et des attentions qu'il faut avoir pour bien figurer.

632. On choisira un terrain uni sur lequel on mesurera exactement la base la plus longue qu'il sera possible. Les deux extrémités de cette base seront placées de maniere qu'elles puissent découvrir un grand nombre de points du terrain dont on veut faire le plan ou la carte.

On tracera sur le papier de la planchette une ligne AB (*planche* A, *pag. dern.*), pour représenter la base qu'on a menée sur le terrain; et si cette base est de 100 toises, on prendra sur une échelle construite au bas du plan, la partie de cette échelle qui représentera 100 toises, et on la portera en AB.

Supposons qu'on fasse la premiere station au point A.

On appliquera l'alidade sur la ligne AB, pour placer convenablement la planchette qu'on fera tourner à cet effet sur son pivot jusqu'à ce que la ligne AB se confonde avec la base qu'elle représente, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'on apperçoive le jalon de la base planté en B. On alignera ensuite du point A tous les objets qu'on veut représenter sur le plan, et l'on tracera les lignes indéfinies AC, AD, AE, AF, AG, AH, AI, etc. pour représenter ces alignements.

On fera planter des jalons sur les points du terrain qu'on voudra figurer sur la carte comme en Q, R, S, T, V, X, Y, Z, etc. sur les sinuosités des vallons, sur le sommet et au pied des montagnes, sur les contours et les angles des rivieres, des ruisseaux, des chemins, etc.

Pour ne point confondre les alignements, on écrira au bout de chacun le nom de l'objet par lequel on l'a dirigé. *Voyez* les lignes AD, AN, AQ, AV.

S'il y avoit des points tels que R ou V qu'on ne pût découvrir du point A, à cause de la disposition du terrain ou de quelque objet interposé, on prolongeroit la base AB jusqu'en *a*, ou tel autre endroit commode d'où les points R et V pourroient être apperçus.

On

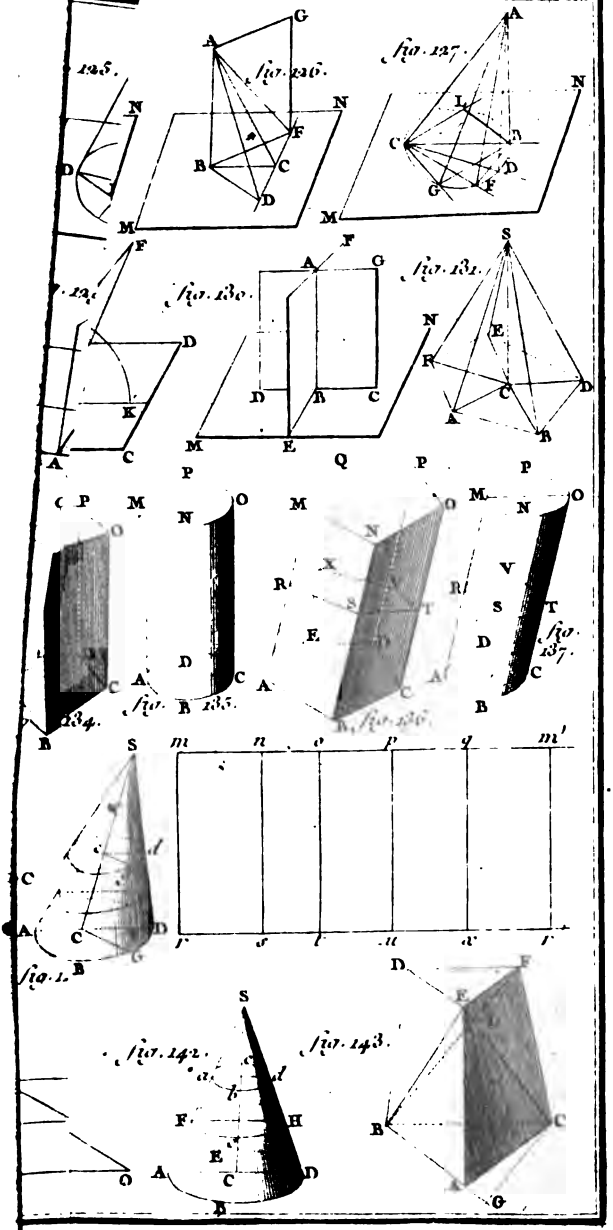
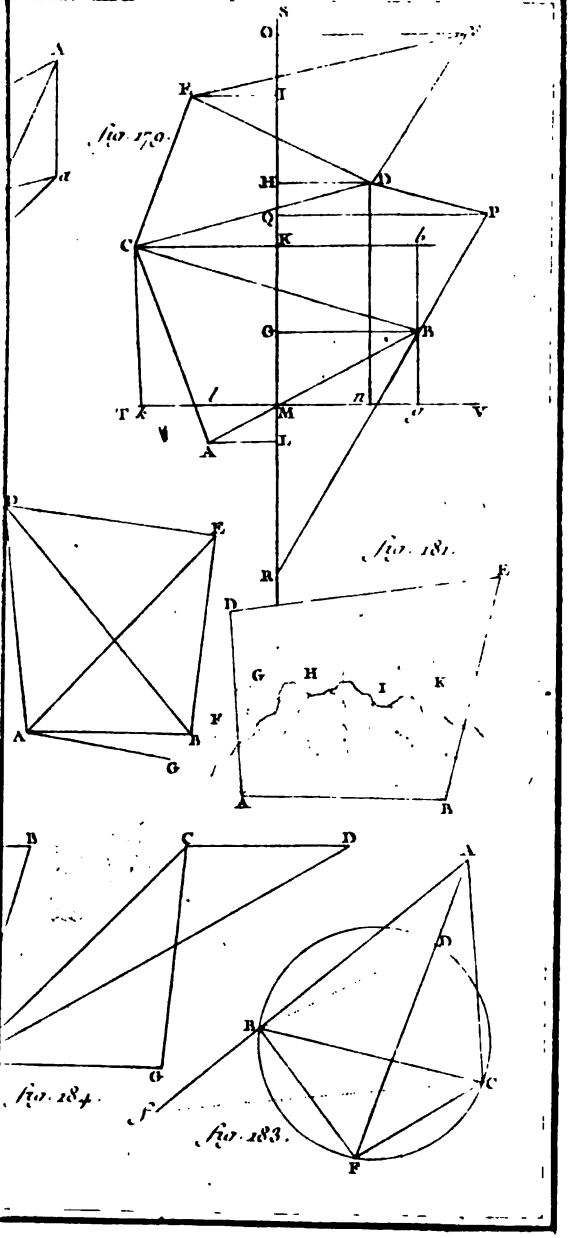


fig. 125.
fig. 126.
fig. 127.
fig. 129.
fig. 130.
fig. 131.
fig. 134.
fig. 135.
fig. 136.
fig. 137.
fig. 138.
fig. 142.
fig. 143.


S
O
A
a
F
I
fig. 179.
H
D
Q
P
C
K
b
G
B
T
X
l
M
n
O
V
A
L
R
D
E
A
B
F
G
fig. 181.
D
E
G
H
I
K
A
B
B
C
D
A
D
B
C
G
fig. 184.
F
fig. 183.

On placera la planchette au point B pour y faire la seconde station, et coupant les alignements qu'on vient de tracer par d'autres alignements BC, BD, BE, BF, BG, BH, BI, etc. pris sur les mêmes points, on tracera sur le plan les objets sur lesquels on a dirigé ces alignements.

On doit remarquer, que quand il se trouve quelques points V, Y, trop proches de la base, les alignements AV et BV, AY et BY, qui passent par ces points, se coupent trop obliquement. Alors on ne tire qu'un seul alignement AV ou BY qu'on fait mesurer.

Et pour éviter la multiplicité et la confusion des lignes, on fera mesurer de même tous les alignements dont les points se trouveront proches de celui où se fait la station, en partant de ce dernier point. Tels sont les alignements BZ, KL, KS, MO, MP, M*r*.

Il arrive quelquefois qu'un seul alignement, comme *By*IH, passe par plusieurs points à la fois, ce qui est très commode. On peut se procurer cet avantage, en faisant planter des jalons dans des alignements déja pris et tracés. C'est ainsi qu'on a placé les jalons *&*, *i* dans l'alignement AK, *y* dans la ligne BH, *s* dans le prolongement de KL, *o* dans l'alignement M*e*.

Comme il n'est pas possible de lever par des alignements tous les détails d'une maison, d'un jardin, d'un village, etc; on fera ces détails à la toise d'après quelques points déterminés qui serviront de base à ces nouvelles opérations. Par exemple, la petite face C*x* de la maison E*x* sera mesurée et placée sur CE suivant l'angle que ces deux faces font entre elles.

On déterminera les sinuosités d'une colline en prenant seulement quelques points Q, R, S, X, *d*, etc. vers le milieu de sa pente, ou vers le pied, comme en T, quand on le trouvera plus commode.

Mais s'il s'agit d'une montagne, il est bon d'en déterminer le sommet et le pied, comme on le voit en *ghstv*, ou en *efn*OP*qr*.

Les contours d'une riviere se détermineront comme en *iklm*; les chemins comme en *n*, *o*, *q*. Quand la

riviere n'est pas considérable, et qu'elle coule entre deux bords à-peu-près paralleles, il suffit d'en trouver un côté, et de déterminer un point de l'autre pour en avoir la largeur. S'il y a des isles, on en déterminera les deux pointes comme en *b*, *c*; mais très souvent il suffira d'observer à quel alignement elles répondent, comme en *z*.

S'il y a des points, tels que V et *n*, sur la situation desquels ont ait quelque doute, on pourra les vérifier en y faisant passer de nouveaux alignements KV, M*n*.

On prendra l'alignement AK de la premiere base, pour servir de seconde base, et l'alignement KM de cette derniere pour servir de troisieme base. Mais le point M ne pouvant être vu du point A, et l'alignement KM ne pouvant être mesuré, cet alignement sera tracé indéfiniment, et la planchette sera placée au point M du terrain, comme si ce point étoit déja marqué sur le plan; et choisissant un point élevé, tel qu'un clocher rapporté sur le papier, par exemple en N, on fera tourner l'alidade autour de ce point N, jusqu'à ce qu'on apperçoive la pointe du clocher qu'il représente, et l'on tracera la ligne MN, qui coupera KM au point M.

Observez qu'avec une boussole on pourroit déterminer le point M sans se servir de l'alignement KM; mais il faudroit qu'après avoir orienté la planchette, on pût découvrir du point M deux autres points marqués sur le plan, et que les alignements qu'on prendroit sur ces points se coupassent assez nettement pour donner le point M avec exactitude.

Cette suite de bases prises sur les alignements des bases précédentes n'est bonne que dans un petit plan (car on sent bien que l'exactitude diminue à mesure qu'on s'éloigne de la premiere base). Mais quand on veut de la précision, et qu'il s'agit d'un plan d'une grande étendue, il faut opérer différemment.

On cherchera donc un point élevé qui puisse être vu de tous les endroits du terrain qu'on veut représenter, et l'on regardera ce point comme le centre d'un polygône dont les côtés serviront de base à toutes les opéra-

tions de la planchette. On pourra déterminer ces bases avec le graphometre ou avec la planchette même.

On commencera par mener une premiere base sur un terrain uni.

Si l'on emploie le graphometre, on le placera à tous les angles du polygône pour les mesurer; on calculera les rayons et les côtés de ce polygône par les regles ordinaires de la trigonométrie, et l'on poussera le calcul aussi loin qu'on le jugera nécessaire pour l'exactitude du plan.

Si l'on se sert de la planchette, on tracera les alignements du centre du polygône aux extrémités de la base mesurée, pour avoir ce centre. On prendra ensuite un alignement sur l'angle voisin du polygône, pour déterminer cet angle par un autre alignement pris sur le centre, comme on en a fait pour le point M. En tournant ainsi autour du polygône de gauche à droite, par exemple, on en déterminera tous les côtés, et l'on vérifiera ces premieres opérations par d'autres alignements qui se prendront en tournant le polygône de droite à gauche.

De la boussole et de son usage dans la levée des plans.

633. Tout le monde connoît la proprieté des aiguilles aimantées de se tourner vers le nord avec une déclinaison plus ou moins considérable, et qui varie suivant les temps et les lieux (*fig.* 187.) La boussole des géometres n'est autre chose qu'une pareille aiguille posée sur un pivot au moyen d'une chape pratiquée dans le milieu de son épaisseur. Pour que la boussole soit aussi exacte qu'il est possible, il faut que la chape soit d'agate. Le pivot de l'aiguille est placé au centre d'une circonférence de cercle tracée sur le fond d'une boîte quarrée, creusée circulairement dans toute son épaisseur. Cette circonférence est divisée en quatre parties égales par deux diametres perpendiculaires entre eux, et aux côtés du quarré de la boîte. Sur l'un des côtés du

quarré, on applique un petit solide de forme prismatique, dont la base est un petit rectangle. Cette petite boîte est attachée par une vis au plan d'une des faces latérales de la boussole, de maniere qu'elle puisse tourner pour s'élever ou s'abaisser au-dessus ou au-dessous du plan de la boussole que l'on dispose toujours horizontalement. Dans chaque face E, F de cette petite boîte il y a un petit trou, et au-dessous un autre plus grand, au milieu duquel se trouve une petite languette de cuivre terminée en pointe : le tout est tellement disposé de part et d'autre, qu'en dirigeant un rayon visuel par l'un des petits trous, on apperçoit dans l'alignement les extrémités de la petite languette dont on vient de parler ; ce qui fixe la position des rayons dirigés avec cet instrument aux différents objets. On voit donc que la ligne de mire EF, et le diametre AB étant toujours paralleles, l'angle que fait l'aiguille GH de la boussole avec AB, est le même qu'elle fait avec le rayon visuel dirigé aux objets que l'on observe par l'alidade EF. Tout ceci posé, voici comment on se sert de la boussole pour lever un plan, ou plutôt pour remplir un détail entre des points bien établis par la trigonométrie.

Supposons qu'il faille figurer le contour d'une riviere (*fig.* 188) ; on mesurera sur l'un de ses bords différentes bases AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH ; ensuite on observera avec la boussole les angles *a*AB, *b*BC, *c*CD, etc. que forment les directions de chacun de ces alignements avec la ligne nord et sud de la boussole, qui est toujours indiquée par la direction de l'aiguille, et qui donne sur le plan les paralleles A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, etc. puisque dans un même lieu l'aiguille est toujours tournée vers le même point de l'horizon ; et c'est ce parallélisme de l'aiguille aimantée, dans quelque position qu'elle se trouve, qui rend la boussole commode et expéditive dans les opérations de détail, parcequ'il n'est pas besoin de fixer deux objets pour déterminer les angles que font entre eux les différents alignements. S'il y a sur l'autre bord, ou dans le milieu de la riviere, des points remarquables, tels que M, N,

O, P, etc. ou même s'il n'est question que déterminer en différents endroits la largeur de la riviere, on dirigera à ces points des rayons tels que AM et BM, AN et BN; BO, CO, et l'on mesurera les angles de ces différents alignements avec la direction de l'aiguille. S'il n'y a point d'objets remarquables aux endroits où l'on veut fixer la largeur de la riviere, on y fera planter des signaux, et l'on prendra aux extrémités des différentes bases particulieres, comme AB, BC, etc. les angles que font avec ces mêmes bases les rayons visuels menés aux points que l'on veut marquer sur le plan.

On voit aisément que l'on peut se servir également de la boussole pour former l'enceinte d'un parc ou de tout autre terrain de telle figure que l'on voudra; mais il ne faut se servir de cet instrument que dans les opérations où l'on n'est pas curieux de la plus grande précision, parceque la moindre chose peut faire varier l'aiguille dans sa direction, sans que l'on s'en apperçoive, et parceque d'ailleurs l'agitation de cette même aiguille sur son pivot, ne permet presque jamais d'observer les angles à un demi-degré près. Un des principaux usages de la boussole est de servir à orienter les plans, soit à l'égard du nord de l'aimant, soit à l'égard du vrai nord, lorsque l'on sait de combien l'aiguille aimantée décline de la vraie direction de la ligne nord et sud.

Ceux qui sont dans le cas de lever des cartes souterraines, comme les officiers de mineurs, ou ceux qui travaillent à l'exploitation des mines, peuvent faire usage de la boussole pour tracer sous terre des alignements paralleles à des lignes données de direction à la surface extérieure de la terre. Tout se réduit à faire des angles égaux avec la direction de l'aiguille, soit en haut, soit en bas des puits de mines, par lesquels on descend dans l'intérieur de la terre. On voit combien il est essentiel de s'assurer que l'aiguille n'est point dérangée de sa direction par du fer qui peut se trouver dans les environs; et souvent il est difficile de se garantir totalement de ces inconvénients.

Supplément aux élements de Géométrie théorique et pratique.

Des anses de panier et de leur construction.

634. On est souvent obligé de construire des voûtes surbaissées dans différentes proportions. Lorsqu'elles doivent être de même largeur et de même hauteur dans toute leur longueur, on les formera de différentes parties de cercle, qui imitent la figure d'une demi-ellipse : ces sortes de courbes ont été nommées *anses de panier*. On s'en sert beaucoup aujourd'hui dans la construction des ponts ; c'est pourquoi nous donnerons à cet article assez d'étendue pour qu'on y puisse trouver une théorie complete de ces sortes de lignes. La droite AB qui joint les extrémités de la courbe (*fig.* 193), se nomme *diametre* ; la droite CD élevée perpendiculairement au milieu du diametre de l'anse, et terminée sous la clef, se nomme la *montée* de l'anse de panier. Les deux extrémités de l'anse de panier se nomment les *naissances* de la courbe.

Comme toute anse de panier doit imiter la courbure d'une demi-ovale ou d'une demi-ellipse coupée par son grand axe, et que d'ailleurs on démontre dans tous les traités de sections coniques, que cette derniere courbe a sa tangente aux extrémités de ses axes perpen-

diculaire aux mêmes axes, il s'ensuit que les arcs extrêmes d'une anse de panier, doivent avoir leur centre dans le diametre. De plus, parceque les deux moitiés d'une demi-ellipse sont semblables, il est évident que l'anse de panier doit être composée d'un même nombre d'arcs semblables et égaux deux à deux de part et d'autre de celui du milieu; et par conséquent le nombre des arcs qui composent une anse de panier, doit toujours être impair, dont celui du milieu se trouvera coupé en deux parties égales.

Lorsqu'une anse de panier n'est pas extrêmement surbaissée, on peut la construire avec trois arcs de cercle, et donner aux arcs extrêmes plus ou moins de degrés : mais lorsque la moitié est plus petite que la moitié du demi-diametre, on est obligé, pour que cette courbe ait une figure agréable, de donner à chacun des arcs extrêmes plus de 60°; et l'on augmente d'autant plus ces arcs, que l'anse est plus surbaissée.

Enfin, lorsque l'anse de panier est extrêmement surbaissée, comme lorsque la montée est moindre que le quart du demi-diametre; si on ne la formoit qu'avec trois arcs de cercle, la courbure des arcs extrêmes différeroit nécessairement trop de celle de l'arc moyen, ce qui choqueroit la vue, et seroit même contre les principes d'une bonne construction. Dans ce cas on lui donne au moins cinq centres, quelquefois sept, et même on peut lui en donner jusqu'à onze et encore plus.

Sur un même diametre et une même montée, on peut faire une infinité d'anses de panier différentes les unes des autres ; ainsi le problême est indéterminé de sa nature ; et l'indétermination ou le nombre de solutions dont il est susceptible est d'autant plus grand que la courbe a plus de centres ; mais on le détermine par les conditions que l'on établit, soit pour les nombres de degrés de chaque arc, soit pour les rapports des différents rayons. En général, quel que soit le nombre des arcs de cercle qui forment une anse de panier, il faut observer que les nombres de leurs degrés, ajoutés ensemble, doivent faire 180°, ou la valeur d'une demi-circonférence.

Nous traiterons d'abord des anses de panier à trois centres ; ensuite nous donnerons différentes constructions de ces courbes à cinq et à sept centres ; d'où l'on pourra connoître, comment il faudroit s'y prendre pour des courbes plus composées.

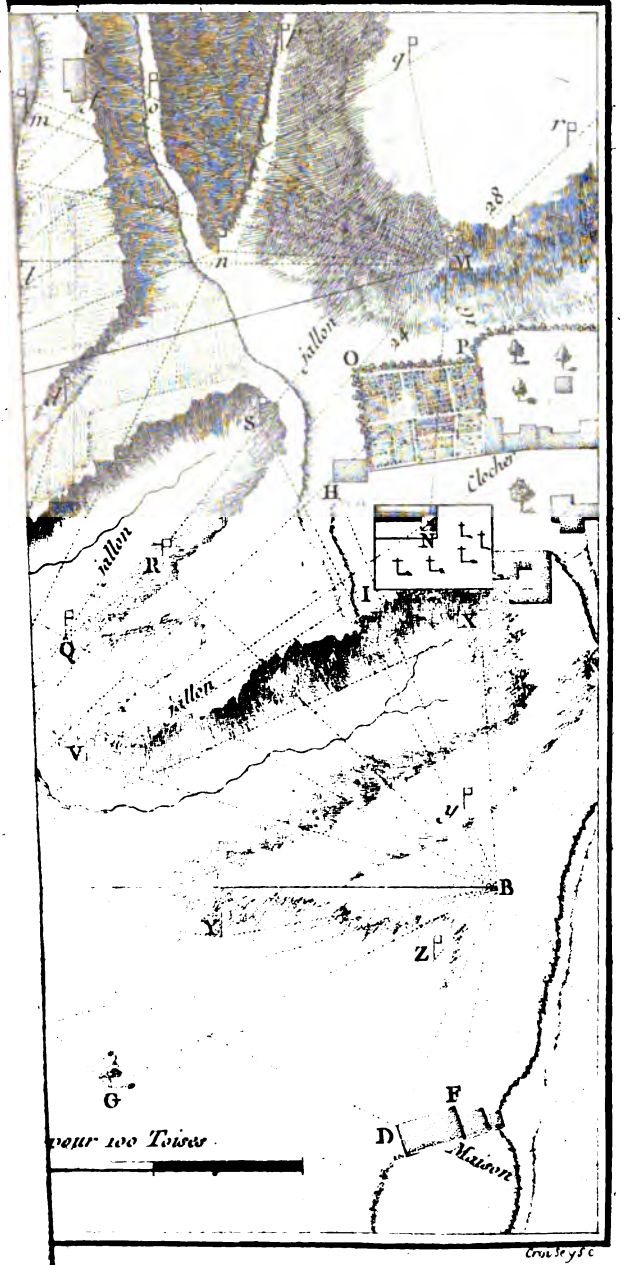
PROBLÊME I.

635. *Le diametre AB et la montée CD d'une anse de panier* (fig. 190), *étant donnés avec les centres E, F des arcs extrêmes ; décrire la courbe.*

SOLUTION.

Il est visible que tout se réduit à trouver le centre G de l'arc du milieu MDN. Pour y parvenir, supposant le problême déja résolu, je

Planche A. page 520



remarque que les lignes GM et GD doivent être égales ; mais la partie EM est déja donnée sur le rayon GM ; donc si l'on prend sur la montée CD, DH égale au rayon extrême AE ; ayant tiré EH, cette ligne aura ses deux extrémités à égales distances du centre G demandé. Donc en élevant sur le milieu I de cette ligne la perpendiculaire IG ; le point où elle coupera la montée prolongée sera le centre de l'arc moyen. Ce qui fournit cette construction.

Sur CD prenez DH = AE ; joignez EH ; sur le milieu de cette ligne élevez la perpendiculaire IG, qui donnera sur la montée prolongée le centre demandé. C. Q. F. T et D.

PROBLÈME II.

636. *Le diametre et la montée CD d'une anse de panier avec le centre G de l'arc du milieu étant donnés ; trouver les centres des arcs extrêmes.*

SOLUTION.

Puisque le centre G de l'arc moyen est donné (*fig.* 190), il est évident que les lignes ou rayons GD, GM sont donnés de longueur ; donc si l'on porte GD de A en L ; à cause de l'égalité des lignes AE, ME, on aura aussi EL égale à EG ; mais les points G, et L deviennent des points donnés de position. Donc la ligne GL est aussi donnée de position. D'ailleurs le centre E de l'arc extrême doit être à

égale distance de ces deux points. Donc il sera au point où la perpendiculaire au milieu de GL coupera le diametre AB; ce qui fournit cette construction.

Portez DG de A en L; joignez GL, et par le point K, milieu de cette ligne, élevez une perpendiculaire KE qui vous donnera le centre E de l'un des arcs extrêmes. C. Q. F. T et D.

N. B. Dans le problême premier, si le rayon extrême étoit égal à la montée CD, la ligne EH se confondroit avec le demi-diametre AC; et la perpendiculaire IG à cette ligne devenant parallele à la ligne DC, ne pourroit plus la rencontrer en aucun point; ainsi le problême cesse d'être possible dans ce cas, et par conséquent aussi lorsque l'on auroit AE plus grand que CD.

PROBLÊME III.

637. *Le diametre AB et la montée CD d'une anse de panier étant donnés; décrire la courbe par trois arcs de chacun 60°.*

SOLUTION.

Supposant que les points E, F (*fig.* 191), également éloignés du milieu C du diametre AB, sont les centres des arcs extrêmes, et que les arcs AM, MN et BN sont chacun de 60°, il est visible qu'en tirant AM qui fasse avec AC un angle de 60°, le point M, extrémité du rayon GM, doit se trouver quelque part dans cette ligne; d'ailleurs le triangle MGD étant isoscele,

et l'angle en G de 30°, les deux angles en M et en D seront chacun de 75° : donc si l'on tire en effet DM qui fasse avec DC un angle de 75°, le point M de réunion des arcs AM et MN, se trouvera encore dans cette ligne : donc il sera au point où elles se couperont, ce qui fournit la construction suivante.

Sur AC, comme base, décrivez le triangle ACO équilatéral, ensuite du point C, comme centre, avec le rayon CD, décrivez l'arc DL terminé au côté CO en L ; puis ayant tiré DL prolongée jusqu'en M, menez la ligne MEG parallele à CO, qui donnera les centres E, G de l'arc extrême AM, et de l'arc moyen MDN. Car, à cause du triangle équilatéral AOC, l'angle en A est de 60°, et l'angle DCL sera de 30° : donc à cause du triangle DCL, isoscele par construction, on aura l'angle CDL de 75°, et par conséquent le point M est l'extrémité du premier arc AM ; et de plus on a GM = GD à cause des triangles isosceles et semblables MGD et LCD ; donc l'arc décrit du point G, comme centre, avec le rayon GM, passera par l'extrémité de la montée CD. C. Q. F. T et D.

Corollaire.

638. Il est visible que les arcs extrêmes d'une anse de panier composée de trois arcs de 60°, sont d'autant plus petits que la montée CD est moindre. Car l'angle BAM étant toujours le même, il est visible que plus CD sera petite, plus la ligne DM coupera le côté AO près du

point A. On voit donc qu'il y aura une différence considérable entre les rayons des arcs extrêmes et celui de l'arc moyen ; ce qui rend la courbe peu agréable, et ce qui détermine dans ces cas à la former d'un plus grand nombre d'arcs.

PROBLÊME IV.

639. *Connoissant le diametre AB et la montée CD d'une anse de panier à trois arcs de 60°; trouver la valeur des rayons de ces arcs, sans y employer d'autre expression que celle des mêmes lignes données AB et CD.*

SOLUTION.

La figure fait voir que le rayon AE est égal à AC — CE; et que le rayon DG ou AF est égal à AC + CF; mais chacune des lignes CE, CF est égale à MO à cause des triangles semblables AEM, ACO; ainsi tout se réduit à avoir l'expression de la ligne MO. Pour y parvenir, du point L je mene LK parallele à CA, et LI perpendiculaire à la droite AO; ce qui donnera d'abord le triangle OKL équilatéral, et par conséquent l'angle KLO de 60°, et sa moitié ILO de 30°, lesquels étant retranchés de l'angle OLM ou DLC de 75°, donnent l'angle ILM de 45°, et par conséquent l'angle IML aussi de 45°, puisque l'angle I est droit; donc on aura IM = IL, et MO = IO + IM = $\frac{1}{2}$ OL + MI. Tout ceci bien entendu, si l'on suppose OL = 2; OI sera 1; les lignes IL ou IM seront chacune égales

à $\sqrt{3}$, et par conséquent OM sera égale à $1 + \sqrt{3}$; mais la véritable valeur de la ligne OL à l'égard des lignes AC et CD est d'être égale à CA — CD (par construction); on aura donc cette proportion $2 : 1 + \sqrt{3} :: OL$ ou CA — CD : $OM = (CA - CD) \times \frac{1+\sqrt{3}}{2}$; donc AM ou $AE = AC - CE = AC - (CA - CD) \times \frac{1+\sqrt{3}}{2}$; et AF ou AC + CF est égale à $CA + (CA - CD) \times \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Ainsi l'on aura la valeur du rayon de l'arc moyen, et celui de chacun des arcs extrêmes; par la seule connoissance du demi-diametre, et de la montée CD. C. Q. F. T. et D.

COROLLAIRE I.

640. Si l'on prend pour valeur approchée de $\sqrt{3}$ la fraction $\frac{363}{121}$, dont le dénominateur est le quarré de 11, et dont le numérateur ne surpasse que de deux unités le quarré de 19, on aura, avec assez de précision pour la pratique, $\sqrt{3} = \frac{19}{11}$; au moyen de quoi il sera facile de trouver de nouvelles expressions des rayons AE ou BF et GD des arcs extrêmes, et de l'arc moyen. On aura donc $AE = AC - \frac{15}{11} CA + \frac{15}{11} CD$; à cause de $\frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\frac{19}{11}}{2} = \frac{30}{11 \times 2}$, ou bien en réduisant $AE = \frac{15\,CD - 4\,CA}{11}$. De même on trouvera pour la valeur du rayon GD, $\frac{26\,CA - 15\,CD}{11}$ en

substituant $\frac{15}{11}$ pour $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ dans l'expression du même rayon GD trouvée ci-dessus égale à $CA + (CA - CD) \times \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

COROLLAIRE II.

641. Si l'on porte la montée CD sur le diametre AB de l'anse de panier de A en P, on aura $CP = OL = CA - CD$; donc à cause de $CE = OM$, on aura $EP = MK$; mais MK est égale à $(CA - CD) \times \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Car on a $MK = MI - IK = \sqrt{3} - 1$; et faisant la proportion suivante $2 : \sqrt{3} - 1 :: OK : KM$, on trouvera $KM = \frac{OK \times \sqrt{3}-1}{2}$, ou $KM = (CA - CD) \times \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Donc $CP : PE :: CA - CD : (CA - CD) \times \frac{\sqrt{3}-1}{2} :: 2 : \sqrt{3} - 1$, d'où l'on peut tirer une nouvelle maniere fort simple de déterminer les centres E, F des arcs extrêmes. Pour cela on prendra la fraction $\frac{675}{225}$, dont le numérateur n'est au-dessous du quarré de 26, que d'une unité, et qui donne $\frac{26}{15}$ pour une valeur très approchée de $\sqrt{3}$, donc $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ sera $\frac{11}{30}$; ainsi la ligne EP sera à CP dans la raison de 11 à 30; ce qui se déduit sur le champ de la proportion qu'on vient de voir, de laquelle on tire $PE = (CA - CD) \times \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, ou $PE = \frac{CP \times \sqrt{3}-1}{2}$; en mettant pour $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ sa valeur.

COROLLAIRE III.

642. Puisque nous avons trouvé OM ou CE égale à $(CA - CD) \times \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, ou à cause que $CP = CA - CD$, par construction; il s'ensuit que l'on aura $CE = CP \times \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ou $\frac{1}{2} CP + CP \times \sqrt{\frac{3}{4}}$; ou enfin, en faisant passer CP sous le radical, on aura $CE = \frac{1}{2} CP + \sqrt{\frac{3}{4}\overline{CP}^2}$, ce qui fournit cette nouvelle construction.

Ayant porté la montée CD de A en P, sur le diametre AC; sur CP comme diametre décrivez le demi-cercle CTP. Divisez le rayon CR en deux également en S; puis ayant élevé la perpendiculaire ST, joignez PT, dont vous prendrez la longueur, que vous porterez de R en E, et le point E sera le centre de l'arc extrême.

Cette construction suit évidemment de ce qu'on vient de voir; car on aura $PT = \sqrt{\frac{3}{4}\overline{CP}^2}$, ou $\frac{1}{2} CP \sqrt{3}$; donc $CR + RE = \frac{1}{2} CP + \frac{1}{2} CP \sqrt{3}$.

PROBLÊME IV.

643. *Connoissant le diametre AB et la montée CD d'une anse de panier, dont les trois arcs ont chacun* 60°; *trouver la longueur de cette anse.*

SOLUTION.

Supposant que le rapport de la circonférence au diametre est celui de 22 à 7 (*fig.* 191),

sachant de plus que tout arc de 60° est le tiers de la demi-circonférence ; on aura pour la longueur de l'arc moyen MN, $MDN = \frac{GD}{3} \times \frac{22}{7}$; de même la valeur des deux arcs extrêmes AM et BN sera $\frac{2 \cdot AE}{3} \times \frac{22}{7}$; donc la longueur de l'anse de panier sera $\frac{2\,AE + GD}{3} \times \frac{22}{7}$. Mais on a trouvé ci-dessus $AE = CA - (AC - CD) \times \frac{1+\sqrt{3}}{2}$; et AF ou $GD = AC + (AC - CD) \times \frac{1+\sqrt{3}}{2}$; donc $2\,AE + GD = 3\,AC - (AC - CD) \times \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Si l'on met dans cette expression $\frac{19}{11}$ pour $\sqrt{3}$, elle devient $3\,AC - \frac{15\,AC}{11} + \frac{15\,CD}{11}$ ou $\frac{33\,AC - 15\,AC + 15\,CD}{11}$; réduisant et prenant le tiers de cette somme, puis multipliant par $\frac{22}{7}$, on aura pour dernière expression de la longueur de l'anse de panier $\frac{12\,AC + 10\,CD}{7}$ ou $\frac{6\,AB + 10\,CD}{7}$; c'est-à-dire, qu'elle est à très peu près égale á *six fois le diametre, plus dix fois la montée, le tout divisé par sept.* C. Q. F. T et D.

Des anses de panier à cinq centres.

644. Nous supposerons dans cet article, que les anses de panier à cinq centres sont composées de cinq arcs de cercle, dont les deux extrêmes seront de 60° chacun, ayant toujours leurs centres dans le diametre AB ; que les arcs suivants seront chacun de 15° ; enfin que l'arc du milieu qui

qui sera divisé en deux également par la montée prolongée sera de 30°; ce qui fait toujours une somme de 180°.

Comme la courbe ADB (*fig.* 192), est toujours construite symmétriquemment, les centres G et L des arcs moyens doivent toujours être à distances égales de ceux des arcs extrêmes, et sur les prolongements de leurs rayons. Ainsi le triangle GOL formé par les rayons de ces arcs extrêmes, sera équilatéral. De plus, l'angle du milieu devant être de 30°, comme on l'a déja dit, les angles OKG, OKL qui en sont chacun la moitié, seront aussi de 15°; donc, à cause des angles OGK, OLK égaux à leurs opposés au sommet MGP, NLQ que nous supposons aussi de 15°; les triangles GOK, LOK seront isosceles; ce qui donnera OG, OL, OK toutes égales entre elles. D'où il suit encore, à cause du triangle équilatéral GOL, que OR $= \frac{1}{2}$ GO $\surd 3$ ou $\frac{1}{2}$ KO $\surd 3$. Cela posé il sera facile de résoudre les problêmes suivants.

PROBLÊME I.

645. *Le diametre AB, la montée CD, avec les rayons AE, BF des arcs extrêmes d'une anse de panier à cinq centres étant donnés; décrire cette courbe.*

SOLUTION.

Puisque les arcs extrêmes doivent être chacun de 60°; il est visible que leurs rayons ME, NF étant prolongés, donneront le triangle

équilatéral EOF, et détermineront sur la montée CD prolongée, le point O qui doit être également éloigné des points K, G, L où doivent être les centres des arcs moyens, et de l'arc du milieu PDQ. Tout se réduit donc à trouver sur OD prolongée, la valeur de la ligne OK. Pour y parvenir, je remarque d'abord que l'on aura $OK + OD = KG + GM$; mais $GM = OM - GO$; et OM est égale à AF à cause des lignes EF, AE respectivement égales aux lignes EO, EM; donc on aura $OK + OD = GK + AF - GO$; ou bien encore $OK + OD = GK + AF - OK$; donc en ajoutant OK de part et d'autre, et retranchant OD aussi de chaque membre, on aura $2OK = GK + AF - OD$. Comme la ligne GK dépend de la valeur de la ligne inconnue OK; je cherche encore à exprimer GK par le moyen de cette ligne, afin de n'avoir que la seule inconnue OK, avec les quantités connues AF et DO. Pour cela je fais attention que le triangle isoscele KOG donne $\overline{KG}^2 = 2\,\overline{KO}^2 + 2\,KO \times OR$ (n°. 261), et mettant pour OR sa valeur $\frac{1}{2}KO\sqrt{3}$, on aura $\overline{KG}^2 = 2\,\overline{KO}^2 + \overline{KO}^2\sqrt{3}$, donc $KG = KO \times \sqrt{2+\sqrt{3}}$; ainsi mettant cette derniere valeur de KG dans la derniere équation, nous aurons $2QK = KO \times \sqrt{2+\sqrt{3}} + AF - OD$; et retranchant de chaque membre $KO \times \sqrt{2+\sqrt{3}}$; on aura $2KO - KO \times \sqrt{2+\sqrt{3}} = AF - OD$;

donc KO $= \frac{AF - OD}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$, et par conséquent la position des centres de l'arc du milieu, et des arcs moyens, devient donnée. C. Q. F. T. et D.

COROLLAIRE.

646. On voit que pour que le problême soit possible, il faut que le rayon de l'arc extrême soit tel que la différence de ce rayon au diametre de l'anse, soit plus grande que la ligne OD. De plus, si l'on prend la fraction $\frac{675}{225}$ au lieu du nombre 3 auquel elle est égale, dont le dénominateur est le quarré de 15, et dont le numérateur est d'une unité seulement moindre que le quarré de 26, on aura sans erreur sensible $\frac{26}{15}$ pour $\sqrt{3}$, et par conséquent $\frac{56}{15}$ pour le nombre $2 + \sqrt{3}$; multipliant encore le numérateur et le dénominateur par 15, afin d'avoir un quarré au dénominateur, on trouvera que $2 + \sqrt{3}$ est très exactement égal à $\frac{840}{225}$. Le numérateur de cette fraction se trouvant encore d'une seule unité au-dessous du quarré de 29, on aura $\frac{29}{15}$ pour $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, et retranchant cette fraction du nombre 2 ou de $\frac{30}{15}$, on aura $\frac{1}{15}$ pour la valeur de la quantité $2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, par laquelle il faut diviser AF — OD. On prendra donc la différence des lignes AF, OD que l'on multipliera par 15; puisque diviser par une fraction, c'est multiplier par l'inverse de cette fraction; et l'on aura la valeur précise des lignes

OG, OL, OK, qui sont toutes égales entre elles.

PROBLÈME II.

647. *Connoissant le diametre AB* (fig. 192), *la montée CD d'une anse de panier à cinq centres, avec le rapport des rayons de l'arc extrême au rayon GM de l'arc suivant, que nous supposerons égal à celui des lignes données RS, TV; trouver les centres de cette courbe.*

SOLUTION.

Nous supposons toujours que les arcs extrêmes sont de 60°, que les arcs suivants sont de 15 degrés, et que celui du milieu est de 30°; cela posé, quelle que soit la longueur du rayon inconnu AE, on aura toujours la proportion RS : TV :: AE : GM; d'où l'on tire $GM = \frac{n}{m} AE$; en désignant par les lettres m et n les lignes RS et TV; mais la ligne $OG = OM - GM = AF - GM = 2AC - AE - \frac{n}{m} AE$. De plus, on a aussi $OG = 15\,DI$; suivant ce que nous avons trouvé à la fin du dernier problême; ou à cause que $DI = AF - OD$, on aura encore $OG = (AF - OD) \times 15$. Egalant ces deux valeurs de la même ligne OG, on formera cette équation $2AC - AE - \frac{n}{m} AE = (AF - OD) \times 15$. Pour n'avoir dans cette égalité que la ligne inconnue AE, et des lignes totalement connues; je cherche à exprimer les lignes AF et

OD, par le moyen des lignes connues AC, CD, et de la ligne AE que je veux découvrir; et d'abord je vois que AF = 2 AC — AE. La ligne OD étant composée de CO + CD; si l'on met pour CO sa valeur déterminée par la proportion 2 : $\sqrt{3}$ :: OE ou EF : CO, on aura d'abord CO = $\frac{(2\,AC - 2\,AE) \times \sqrt{3}}{2}$ = (AC — AE) $\sqrt{3}$; ou enfin CO = (AC — AE) × $\frac{26}{15}$, en mettant cette fraction à la place de $\sqrt{3}$. Donc (AF — OD) × 15 = $\left(2\,AC - AE - CD - \frac{26\,AC}{15} + \frac{26\,AE}{15}\right) \times 15$. Faisant les multiplications indiquées, on trouvera que (AF — OD) × 15 = 30 AC — 15 AE — 15 CD — 26 AC + 26 AE, ce qui se réduit à 4 AC + 11 AE — 15 CD: donc on aura toujours $2\,AC - AE - \frac{n\,AE}{m} = 4\,AC + 11\,AE - 15\,CD$; d'où il est facile de tirer la ligne inconnue AE. Pour y parvenir, on n'a qu'à faire passer dans le second membre de l'égalité tous les termes affectés de AE, et dans le premier toutes les quantités connues, et l'on trouvera après les transpositions $15\,CD - AB = 12\,AE + \frac{n\,AE}{m}$; donc $AE = \frac{15\,CD - AB}{12 + \frac{n}{m}}$: La ligne AE étant connue et déterminée; le point O devient aussi donné de position, et par conséquent aussi la ligne OD est donnée de grandeur. Portant donc la ligne AF de O en I sur OD, on fera les lignes OG, OL, OK chacune égale à 15 DI, comme au problème précédent; et l'on tracera la courbe demandée. C. Q. F. T. et D.

PROBLÈME III.

648. *Le diametre AB, la montée CD* (fig. 192), *et le rayon AE d'un arc extrême d'une anse de panier à cinq centres, étant donnés; trouver la longueur de cette courbe.*

SOLUTION.

Les deux arcs AM et BN étant chacun de 60°, leur longueur sera égale aux deux tiers de la demi-circonférence, qui auroit pour rayon AE; ainsi elle est égale $AE \times \frac{22}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{44}{21} AE$. Les arcs MP et NQ étant chacun de 15°, leur somme vaudra 30°, et sera égale à la sixieme partie de la demi-circonférence, qui auroit GM pour rayon. Elle vaudra donc $\frac{22}{7} \times \frac{1}{6}$ GM, ou $\frac{11}{21}$ GM; enfin l'arc du milieu PDQ sera le sixieme de la demi-circonférence qui auroit KD pour rayon : donc la longueur de cet arc sera $\frac{22}{7} \times \frac{1}{6} \times KD = \frac{11}{21} KD$; ainsi la longueur totale de l'anse sera $\frac{44}{21} AE + \frac{11}{21} GM + \frac{11}{21} KD$, ou $\left(\frac{4\,AE + GM + KD}{3}\right) \times \frac{11}{7}$. Il ne s'agit donc plus que d'exprimer les lignes GM et DK par le moyen du diametre AB, et de la montée CD; mais le rayon GM = OM — OG, et KD est égal à KO + OC + CD; ainsi mettant ces différentes valeurs dans l'expression que l'on vient de trouver, on aura pour la longueur de l'arc $\frac{4\,AE + OM + OC + CD}{3} \times \frac{11}{7}$; ou à cause que OM = AB — AE; $\frac{3\,AE + AB + OC + CD}{3} \times \frac{11}{7}$. Enfin, puisque $OC = CE \times \sqrt{3}$ ou $\left(\frac{AB}{2} - AE\right) \times \sqrt{3}$,

si l'on prend $\frac{26}{15}$ pour $\sqrt{3}$, on aura après cette substitution ADB $= \frac{3\,AE + AB + \frac{13}{15}AB - \frac{26}{15}AE + CD}{3} \times \frac{11}{7}$; faisant les multiplications indiquées, on trouvera ADB $= \frac{28\,AB + 15\,CD + 19\,AE}{315} \times 11$. C'est-à-dire que pour avoir la longueur d'une anse de panier à cinq centres, dont les arcs extrêmes sont de 60°, les arcs moyens de 15, et l'arc du milieu de 30°, *il faudra ajouter ensemble vingt-huit fois le diametre, quinze fois la montée, et dix-neuf fois le rayon de l'arc extrême; multiplier le tout par onze, et diviser le produit par* 315. *C. Q. F. T. et D.*

Des anses de Panier à sept centres.

649. Lorsque la courbe a sept centres, il faut connoître au moins deux rayons des arcs extrêmes pour que le problême soit déterminé; encore est-il susceptible d'une infinité de solutions différentes suivant les nombres de degrés que l'on donne à chaque arc de cercle dont la courbe doit être composée. On augmente le nombre des arcs à mesure que la montée devient plus petite à l'égard du diametre; afin que la courbure de l'anse de panier variant plus insensiblement, la forme de cette courbe approche davantage de celle d'une véritable ellipse, et devienne par conséquent plus gracieuse. Lorsque la montée est tant soit peu au-dessous de la moitié du demi-diametre, on pourra construire une courbe agréable en donnant aux arcs

extrêmes 40°; aux deux suivants 20 degrés chacun; aux deux autres encore 15°; enfin, 30° à celui du milieu; ce qui fait toujours une somme de 180°. On pourroit aussi donner 20 degrés à tous les arcs intermédiaires aux arcs extrêmes; mais dans cette distribution des arcs, celui du milieu se trouve d'un rayon beaucoup plus long que les autres; ce qui rend sa courbure trop insensible, et diminue la solidité de la voûte, dont les clavaux n'ont pas assez de coupe. Ainsi nous croyons qu'il vaut mieux adopter la premiere combinaison; on peut aussi donner à chacun des arcs d'une anse de panier à sept centres $22\frac{1}{2}$ degrés; alors celui du milieu sera de 45°. Cela posé, le problême suivant dépendra à-peu-près des mêmes principes que les précédents.

PROBLÊME.

650. *Connoissant le diametre AB* (fig. 193), *et la montée CD d'une anse de panier à sept centres, le rayon extrême et celui de l'arc suivant; construire la courbe, ou ce qui revient au même, déterminer les rayons des arcs moyens.*

SOLUTION.

Le rayon AE de l'arc extrême étant donné, ainsi que le nombre de ses degrés que nous supposons de 40°, la ligne MF sur laquelle on doit prendre le rayon de l'arc suivant devient aussi donnée de position; et parceque l'on suppose connu le rapport de ce second rayon avec le

premier, le centre F du second arc devient donné de position. Il n'est pas moins évident qu'en supposant l'arc MN de 20°, la ligne NFO sur laquelle on doit prendre le centre du troisieme arc, devient une ligne donnée de grandeur et de position. Par conséquent le point O où cette ligne prolongée coupera la montée CD aussi prolongée, sera aussi donné de position; et le triangle LO*l* sera équilatéral; puisque l'angle CLF étant extérieur au triangle ELF, vaut à lui seul les deux angles intérieurs opposés LEF de 40°, et LFE de 20°; les lignes AL, CL et CO seront toutes données et connues, ainsi que les lignes EL, LF et EF; il n'y a donc plus que la position des centres G et *g* des arcs contigus à l'arc moyen, et celle du centre K de ce même arc moyen qui soient inconnues; et parceque cet arc doit être de 30°; sa moitié DKP sera de 15°; ce qui donne, comme au problême précédent, le triangle GOK isoscele; ainsi tout se réduit à trouver la valeur de la ligne OK. Pour y parvenir je remarque d'abord que l'on aura OK + OC + CD = GK + GF + FM; à cause de l'égalité continuelle des rayons KD, KP; GP, GN; FN, FM; de plus, on aura comme ci-devant $GK = OK \times \sqrt{2+\sqrt{3}}$; et GF = FO — OG ou FO — OK; remettant ces valeurs de GK et de FO, dans notre premiere égalité, on aura $OK + OC + CD = OK \times \sqrt{2+\sqrt{3}}$, + FO — OK + FM; faisant passer dans le premier membre tous les termes affectés de OK, et dans le second les quantités connues

OC + CD, on trouvera 2 OK — OK × $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, = FM + FO — OD; d'où l'on tire sur le champ KO = $\frac{FM + FO - OD}{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, ou bien à cause que $2 - \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{15}$; KO = (FM + FO — OD) × 15. D'où l'on voit que pour que le problême soit possible, il faut nécessairement que l'on ait FM + FO plus grande que la somme des lignes CO et CD. C. Q. F. T. et D.

SCHOLIE.

651. Supposant toujours connus les rayons AE, FM des arcs extrêmes, on pourroit donner 36° à chacun des mêmes arcs, 24° à chacun des arcs suivants, 18° aux deux contigus à l'arc moyen, et 24 degrés à celui du milieu. Dans ce cas le triangle LO*l* sera toujours équilatéral; mais le triangle GOK n'est plus isoscele; néanmoins le problême se réduit de la même maniere à déterminer la valeur de la ligne OK, par le moyen de laquelle on connoîtra les lignes OG, O*g*. Comme la valeur absolue de la ligne OK deviendroit un peu compliquée, si on vouloit y arriver par une solution directe; et que d'ailleurs on peut trouver les rapports de toutes les lignes dont on a besoin dans ces sortes de problêmes par les tables des sinus, dont l'exactitude est plus que suffisante, même pour les pratiques les plus délicates; nous allons indiquer ici la maniere de résoudre ces questions par le moyen des mêmes tables.

Soit donc OK la ligne inconnue qu'il faut découvrir. A cause du triangle GOK dont tous les angles sont connus ; savoir GKO de 12°, OGK de 18°, et GOK de 150° ; on aura les deux proportions suivantes, *sin.* 18° : *sin.* 12° :: OK : $OG = \frac{OK \times sin.\ 12°}{sin.\ 18°}$, et *sin.* 18° : *sin.* 30° :: OK : $GK = \frac{OK \times sin.\ 30°}{sin.\ 18°}$; donc puisque l'on a toujours OK + OC + CD = GK + GF + FM, et que d'ailleurs GF = FO — OG ; remettant ces valeurs dans l'équation, on aura d'abord $OK + OD = \frac{OK \times sin.\ 30°.}{sin.\ 18°.} + FO - \frac{OK \times sin.\ 12°}{sin.\ 18°} + FM$. Et faisant passer tous les termes affectés de OK dans le premier membre de l'égalité, on trouvera après avoir ôté OD de chacun ; $OK + \frac{OK \times sin.\ 12°}{sin.\ 18°} - \frac{OK \times sin.\ 30°}{sin.\ 18°} = FO + FM - OD$; ou bien encore $\frac{OK \times sin.\ 18° + OK \times sin.\ 12° - OK \times sin.\ 30°}{sin.\ 18°} = FO + FM - OD$. D'où l'on tire sur le champ, en multipliant tout par *sin.* 18°, et divisant par *sin.* 18° + *sin.* 12° — *sin.* 30°, $OK = \frac{(FO + FM - OD) \times sin.\ 18°}{sin.\ 12° + sin.\ 18° - sin.\ 30°}$. On trouvera de même que la ligne OG qui donne le centre de l'arc contigu à l'arc moyen, est égale à $\frac{(FO + FM - OD) \times sin.\ 30°}{sin.\ 12° + sin.\ 18° - sin.\ 30°}$. Ces mêmes expressions peuvent servir à déterminer géométriquement les lignes OK, OG, puisque l'on a géométriquement les sinus des arcs de 30°, 18° et 12°,

Comme les anses de panier à sept centres, et dont les arcs sont tous de $22\frac{1}{2}$ degrés, excepté celui du milieu qui doit être de 45°, sont d'une forme plus agréable; les commençants pourront s'exercer à résoudre le problême, en suivant les principes que l'on vient d'exposer. Le calcul n'a rien de difficile, et l'analyse est toujours à-peu-près la même.

On s'y prendroit à-peu-près de la même maniere pour construire des anses de panier à 9 et à 11 centres; et quoique nous n'ayons parlé ici que des arcs surbaissés, on pourroit appliquer aisément les mêmes solutions, soit numériques, soit géométriques aux arcs en anse de panier surmontés; puisqu'en réunissant les deux moitiés d'une anse de panier surbaissée, de maniere que le demi grand axe soit commun, on formera un arc surmonté de même longueur. Terminons cette théorie par une considération qui peut contribuer à la rendre encore plus utile dans la pratique. Quel que soit le nombre des arcs de cercle dont ces courbes sont composées, elles seront en général d'autant plus solides en construction à l'œil et d'autant plus agréables, que les différences entre les rayons de ces mêmes arcs seront moins considérables; de maniere qu'elles ne passent pas brusquement d'une trop forte courbure, à une presque insensible. Nous ne pouvons pas appliquer cette recherche aux différentes courbes que nous venons de décrire, parcequ'elle nous conduiroit à des expressions assez compliquées, et qui dépendent des

principes du calcul différentiel. Cependant, comme les anses de panier à trois centres sont employées fréquemment ; et que la solution du problême conduit à une opération extrêmement simple, nous joindrons ici le problême suivant, avec sa construction, qui peut être suivie par tous les praticiens. On est redevable de cette idée heureuse à M. l'abbé *Bossut*. Le calcul par la méthode des *maximis* m'a conduit au même résultat.

PROBLÊME.

652. *Sur un diametre AB, et sur une montée CD; construire une anse de panier à trois centres; et dont le rayon de l'arc extrême differe le moins qu'il est possible du rayon de l'arc moyen.* (planche XIII, fig. 189.)

SOLUTION.

Des extrémités du diametre AB au sommet de la montée CD, soient tirées les lignes AD, BD ; sur le milieu E de l'une de ces lignes, soit élevée une perpendiculaire indéfinie, terminée en O au prolongement de la montée CD ; ayant ensuite pris sur cette même ligne une partie DI égale à AC — CD ; et formé sur cette droite prise pour diagonale un parallélogramme DLIK ; on portera l'un de ses côtés DL de O en G au-dessous du même point O, et ce dernier sera le centre de l'arc moyen. Pour

avoir les centres des arcs extrêmes; du point G ainsi déterminé, on abaissera sur les droites AD, BD les perpendiculaires GFD, G*fd* qui donneront par leurs intersections F, *f* sur le diametre AB les centres des arcs extrêmes; et l'on achevera la courbe comme toutes les autres décrites précédemment.

Nous ne pouvons donner ici la démonstration de cette solution; mais d'après la construction que l'on vient d'exposer, il seroit facile de calculer la valeur des rayons AF, GD et la valeur des arcs, AM, MD*m* et *m*B; d'où l'on déduiroit la longueur de la courbe développée. Les commencants pourront s'occuper de cette recherche. Je finirai par observer que je ne sçais pas pourquoi les ingénieurs ont préféré ces sortes de courbes à la véritable ellipse, plus facile à décrire, plus agréable et plus solide; ainsi que j'espere de le démontrer lorsque je pourrai publier la nouvelle édition de mes Sections Coniques.

FIN.

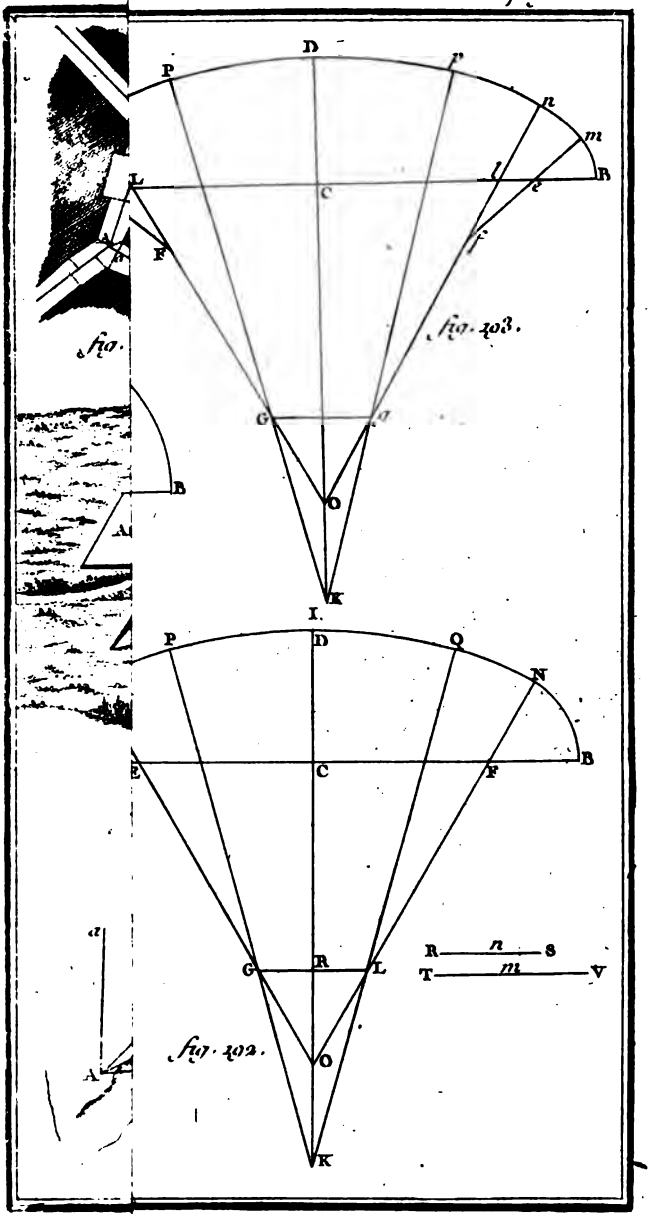


fig. 203.

fig. 202.

Crousey Sculp.

UNIV. OF